Identités des fonctions trigonométriques

Nos identités trigonométriques préférées sont :

symétries

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta), \qquad \text{et} \qquad \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

identité pythagoricienne

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

formules d'addition d'angles

$$\sin(\theta+\phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) + \sin(\phi)\cos(\theta), \qquad \text{et} \qquad \cos(\theta+\phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) - \sin(\theta)\sin(\phi)$$

Définition : La fonction $\csc\alpha$ est une abréviation couramment utilisée en trigonométrie pour désigner la **cosécante** de l'angle α. La **cosécante** est définie comme l'inverse du sinus de l'angle. En d'autres termes :

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Cette fonction est utilisée dans de nombreuses identités trigonométriques et apparaît souvent dans les expressions impliquant des relations entre les fonctions trigonométriques.

La fonction $\sec\alpha$ est, quant à elle, l'inverse du cosinus de l'angle α :

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Pour les problèmes suivants, utilisez les trois identités de base (symétries, pythagoricienne, addition d'angles) pour prouver les égalités données.

1. $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
2. $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$
3. $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$.
4. $(\star)$ $\sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$.
5. $\sin^2\alpha \cot^2\alpha = (1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$.
6. $\tan\beta = \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta\ \cot^2\beta}$
7. $\sin\theta\ \cot\theta + \cos\theta\ \tan\theta = \sin\theta + \cos\theta$.
8. $\dfrac{1}{\sec^2 x} + \dfrac{1}{\csc^2 x} - 1 = 0$
9. $\dfrac{\sec\alpha - 1}{\sec\alpha + 1} + \dfrac{\cos\alpha - 1}{\cos\alpha + 1} = 0$.
10. $\sin\varphi\ (1+\cot^2\varphi) = \csc\varphi$.
11. $\dfrac{\sin(\pi/2 - w)}{\cos(\pi/2 - w)} = \cot w$.
12. $\sec(\pi/2 - z) = \dfrac{1}{\sin z}$.
13. $1 + \tan^2(\pi/2 - x) = \dfrac{1}{\cos^2(\pi/2 - x)}$.
14. $\dfrac{\sin\alpha}{\csc\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sec\alpha} = 1$.
15. $\dfrac{\sec\beta}{\cos\beta} - \dfrac{\tan\beta}{\cot\beta} = 1$.
16. $\dfrac{1}{\csc^2 w} + \sec^2 w + \dfrac{1}{\sec^2 w} = 2 + \dfrac{\sec^2 w}{\csc^2 w}$.
17. $\sec^4\varphi - \sec^2\varphi = \dfrac{1}{\cot^4\varphi} + \dfrac{1}{\cot^2\varphi}$.
18. $\sin^4 x + \cos^2 x = \cos^4 x + \sin^2 x$.
19. $(\star)$ $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$.
20. $\cot(\alpha/2) = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.
21. $\cos(\pi/6 - x) + \cos(\pi/6 + x) = \sqrt{3}\cos x$.
22. $(\star)$ $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$.
23. $\sin(\pi/3 - x) + \sin(\pi/3 + x) = \sqrt{3}\cos x$.
24. $\cos(\pi/4 - x) - \cos(\pi/4 + x) = \sqrt{2}\sin x$.
25. $(\star)$ $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$.
26. $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$.

Encore plus de plaisir avec les identités des fonctions trigonométriques
Pour les problèmes suivants, utilisez les trois identités ci-dessus pour prouver les égalités données.

1. $\cos 2\theta = 2\sin(\pi/4+\theta)\sin(\pi/4-\theta)$.
2. $\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha = \dfrac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$.
3. $\cot\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$.
4. $(\star)$ $\sin 2\beta\,\left(\cot\beta+\tan\beta\right) = 2$.
5. $(\star)$ $\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos 2\theta$.
6. $1+\cos 2\alpha = \dfrac{2}{1+\tan^2\alpha}$.
7. $\tan 2x\cdot\tan x + 2 = \dfrac{\tan 2x}{\tan x}$.
8. $(\star)$ $\csc\alpha\sec\alpha = 2\csc 2\alpha$.
9. $\cot x = \dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$.
10. $1-\sin\alpha = \left(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$.
11. $\cos^4\alpha = \dfrac{2\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha+1}{4}$.
12. $(\star)$ $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta} = \dfrac{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$.
13. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha} = \tan 2\alpha$.
14. $(\star)$ $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \dfrac{\cot\alpha-1}{\cot\alpha+1}$.
15. $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$.
16. $\cot\alpha-\cot\beta = \dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.
17. $\tan\theta\csc\theta\cos\theta = 1$.
18. $\cos^2\theta = \dfrac{\cot^2\theta}{1+\cot^2\theta}$.
19. $\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = (\sec\alpha-\tan\alpha)^2$.
20. $(\star)$ $(\tan\alpha-\cot\alpha)^2+4 = \sec^2\alpha+\csc^2\alpha$.
21. $\cos\beta\cos(\alpha+\beta)+\sin\beta\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha$.
22. $\dfrac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\sec\alpha} = \dfrac{\sin^3\alpha}{1+\cos\alpha}$.
23. $\dfrac{2\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = 1-\cos 2\alpha$.
24. $\tan 2\alpha = \tan\alpha + \dfrac{\tan\alpha}{\cos 2\alpha}$.
25. $\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$.
26. $\dfrac{4\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} - \dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$.
27. $\tan\alpha+\sin\alpha = \dfrac{\csc\alpha+\cot\alpha}{\csc\alpha\cot\alpha}$.

Formules d'addition

$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

Formules de duplication : angle double

$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1$
$\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha$

$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

on en déduit :

$$\begin{aligned}\tan\alpha&=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\frac{2\cos\alpha}{2\cos\alpha}\\&=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}\\&=\frac{\sin(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}\end{aligned}$$

ou bien : $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$

$$\begin{aligned}\tan\alpha&=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\frac{2\sin\alpha}{2\sin\alpha}\\&=\frac{2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}\\&=\frac{1-\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}\end{aligned}$$

ou encore : $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha)&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\&=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}-\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\\&=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha)&=2\sin\alpha\cos\alpha\\&=2\,\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}\\&=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

Formules de linéarisation : transformation de produits en sommes

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$
$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$
$\sin\beta\cos\alpha=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$

Formules de Carnot : réduction du carré

$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}\left[\cos(2\alpha)+1\right]$ $\quad\sin^2\alpha=\frac{1}{2}\left[1-\cos(2\alpha)\right]$ $\quad\tan^2\alpha=\frac{1-\cos(2\alpha)}{\cos(2\alpha)+1}$

Formules de Simpson : transformation de sommes en produits (factorisation)

Dans les relations des transformations de produits en sommes, en posant $\gamma=\alpha+\beta$ et $\delta=\alpha-\beta$, c'est à dire, $\alpha=\frac{1}{2}(\gamma+\delta)$ et $\beta=\frac{1}{2}(\gamma-\delta)$, on a :

$\cos\gamma+\cos\delta=2\cos\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma-\delta}{2}\right)$
$\cos\delta-\cos\gamma=2\sin\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\gamma-\delta}{2}\right)$

$\sin\gamma+\sin\delta=2\sin\frac{(\gamma+\delta)}{2}\cos\left(\frac{\gamma-\delta}{2}\right)$
$\sin\gamma-\sin\delta=2\sin\left(\frac{\gamma-\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)$