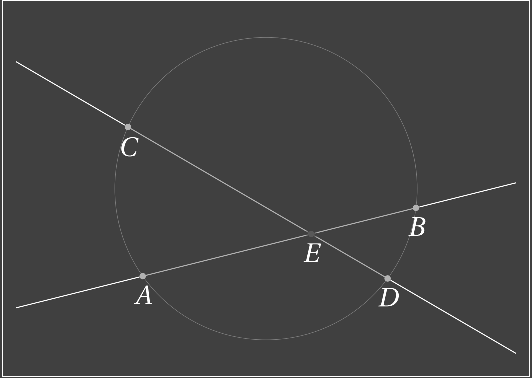
Géométrie synthétique plane

F. Lancereau

30 janvier 2025

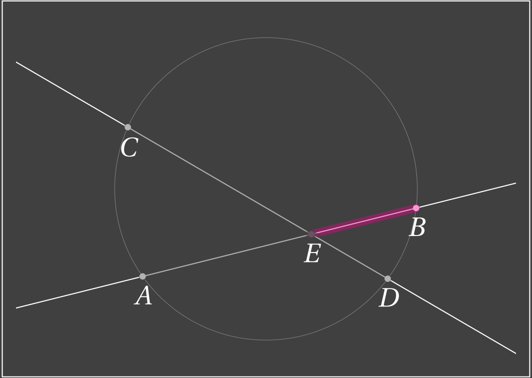
Propriété 1

Si d’un point pris dans le plan du cercle, on mène des sécantes à ce cercle, le produit des distances de ce point aux deux points d’intersection de chaque sécante avec la circonférence est constant, quelle que soit la sécante.



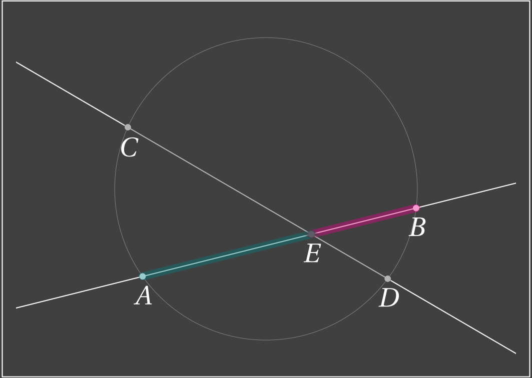
Propriété 1

Si d'un point pris dans le plan du cercle, on mène des sécantes à ce cercle, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection de chaque sécante avec la circonférence est constant, quelle que soit la sécante.



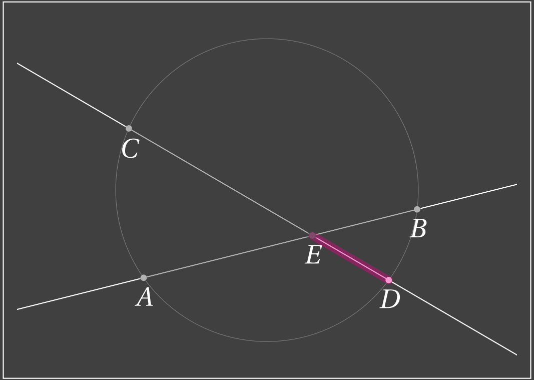
Propriété 1

Si d'un point pris dans le plan du cercle, on mène des sécantes à ce cercle, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection de chaque sécante avec la circonférence est constant, quelle que soit la sécante.



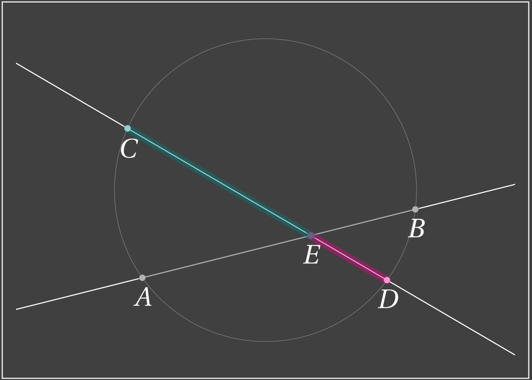
Propriété 1

Si d'un point pris dans le plan du cercle, on mène des sécantes à ce cercle, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection de chaque sécante avec la circonférence est constant, quelle que soit la sécante.

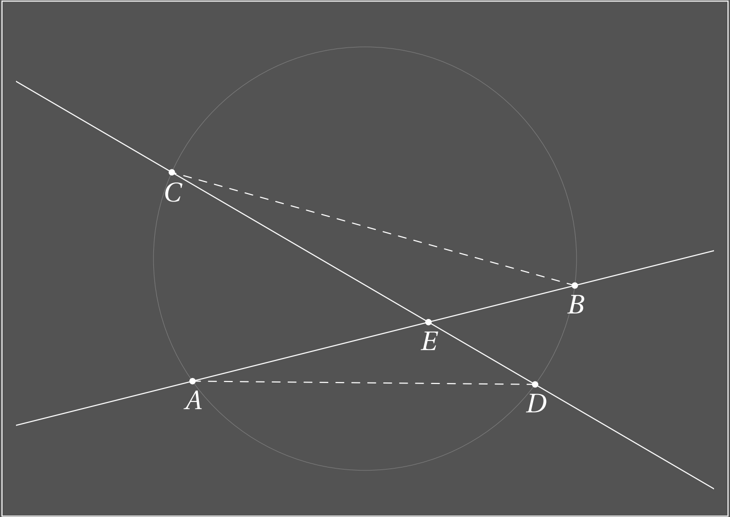


Propriété 1

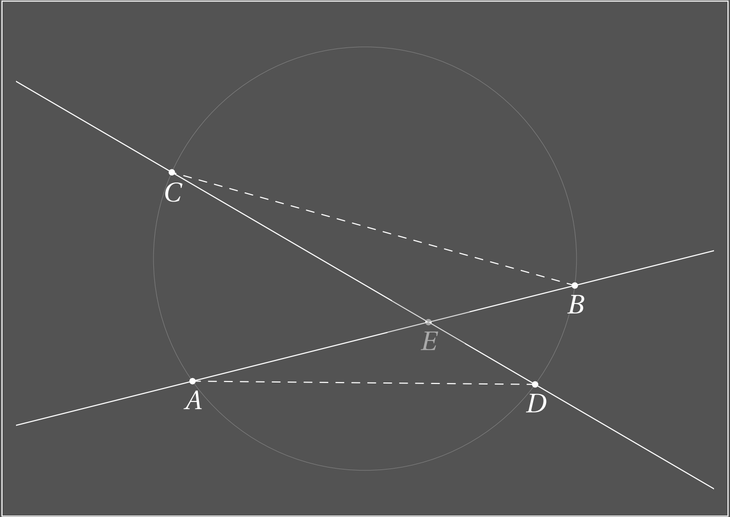
Si d'un point pris dans le plan du cercle, on mène des sécantes à ce cercle, le produit des distances de ce point aux deux points d'intersection de chaque sécante avec la circonférence est constant, quelle que soit la sécante.



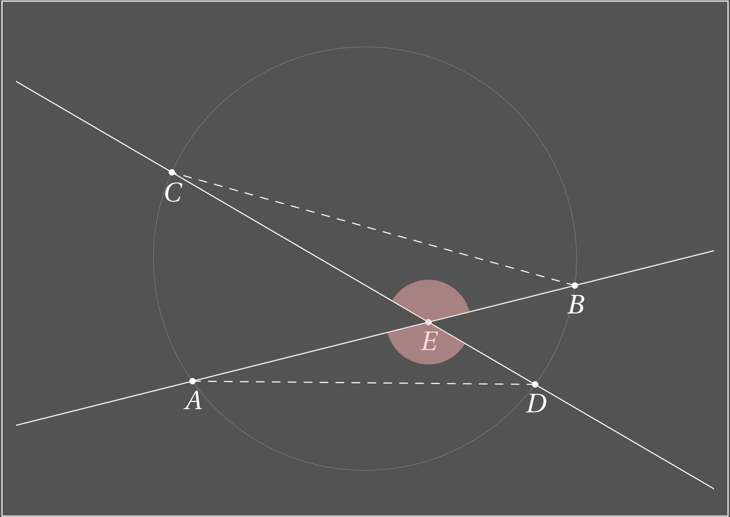
On trace AD et BC



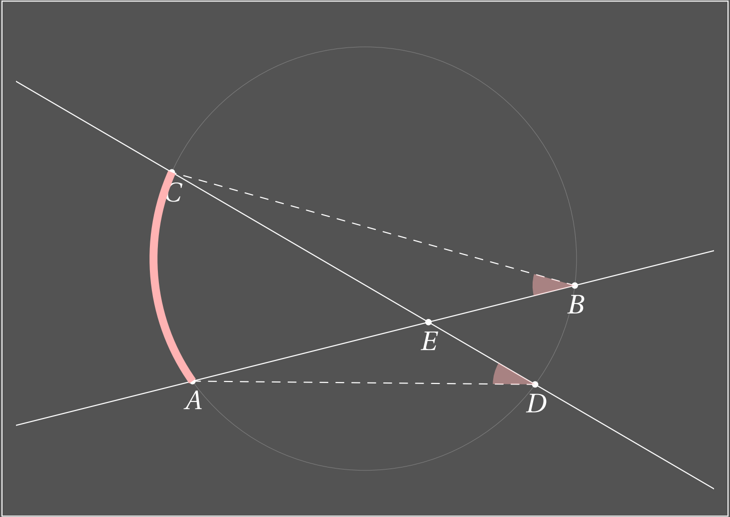
Les angles AED et BEC sont égaux car opposés par le sommet.

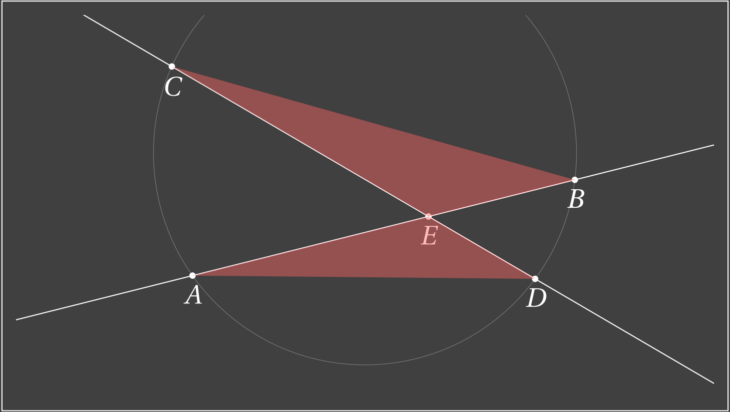


Les angles AED et BEC sont égaux car opposés par le sommet.

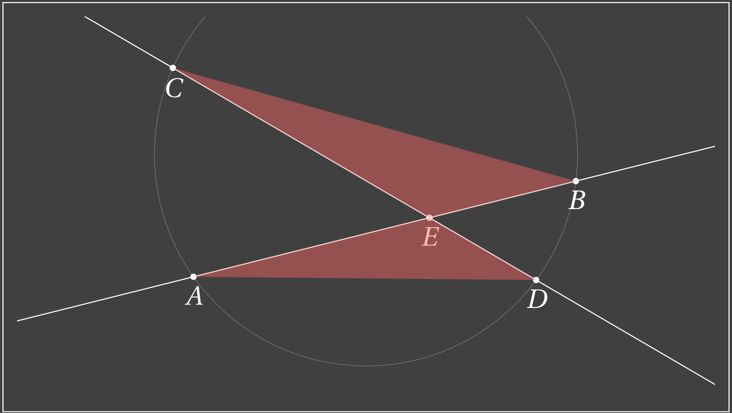


Les angles $\angle ADC$ et $\angle ABC$ sont égaux car ils interceptent le même arc.

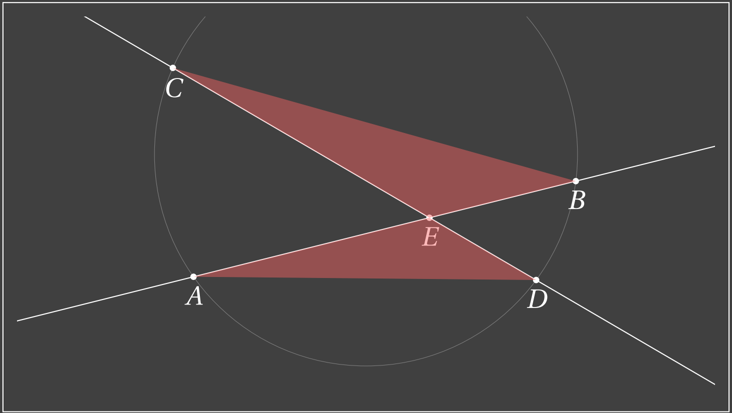




- Les triangles AED et BCE sont semblables



- Les triangles AED et BCE sont semblables
- $\frac{EA}{EC} = \frac{ED}{EB} \implies EA \cdot EB = EC \cdot ED$

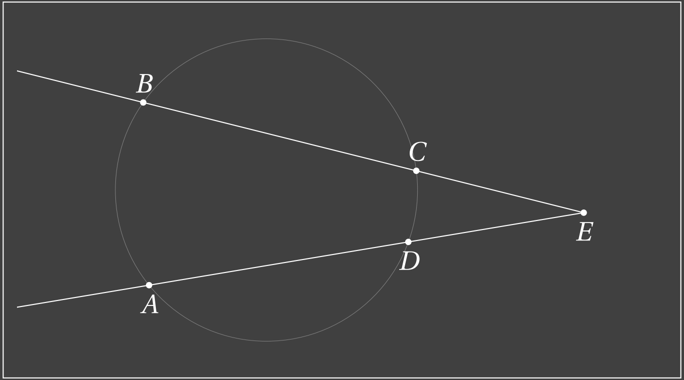


- Les triangles AED et BCE sont semblables
- $\frac{EA}{EC} = \frac{ED}{EB} \implies EA \cdot EB = EC \cdot ED$
- CQFD !

Propriété 1

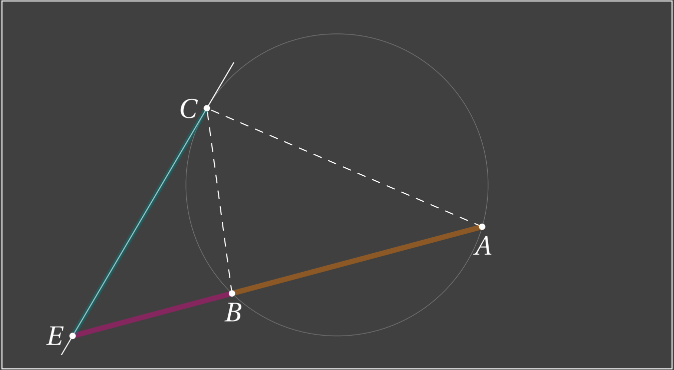
La démonstration est la même dans le cas où E est à l'extérieur du cercle

$$AE \cdot DE = BE \cdot CE$$



Corollaire de la propriété 1

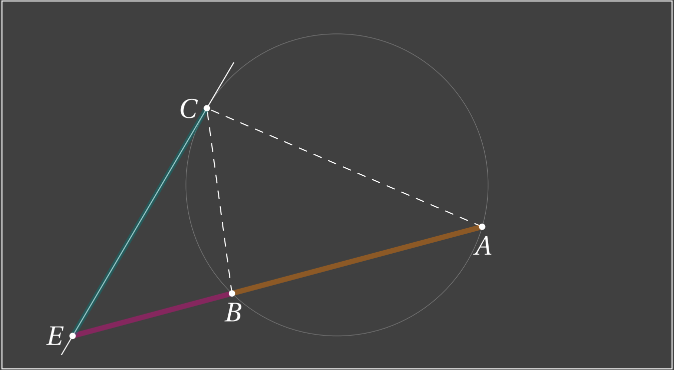
Si par un point extérieur à un cercle, on mène une tangente et une sécante, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.



Corollaire de la propriété 1

Ce qui se traduit par

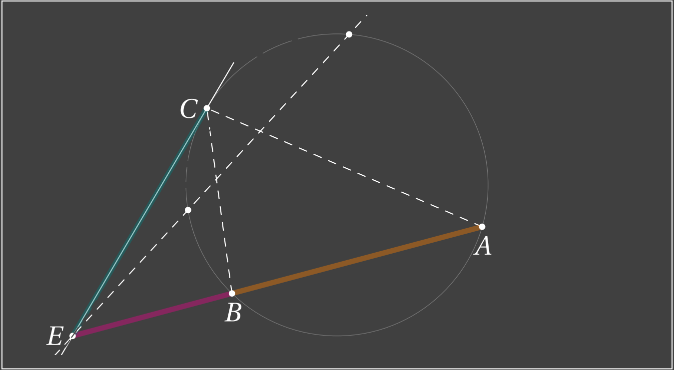
$$EC^2 = EA \cdot EB$$



Corollaire de la propriété 1

Ce qui se traduit par

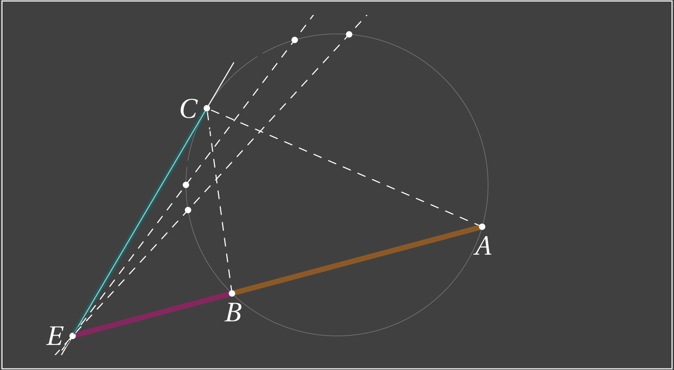
$$EC^2 = EA \cdot EB$$



Corollaire de la propriété 1

Ce qui se traduit par

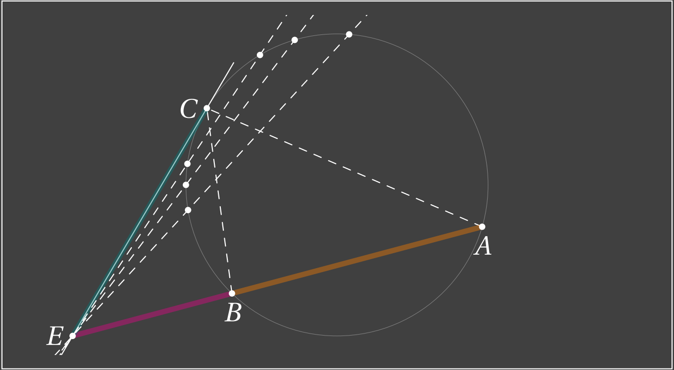
$$EC^2 = EA \cdot EB$$



Corollaire de la propriété 1

Ce qui se traduit par

$$EC^2 = EA \cdot EB$$



Réciproque de la propriété 1

Soient E le point de concours de deux droites, A et B deux points de la première, C et D deux points de la seconde ;

si $EA \cdot EB = EC \cdot ED$, alors les quatre points ABCD appartiennent à une même circonférence.

Réciproque de la propriété 1

Soient E le point de concours de deux droites, A et B deux points de la première, C et D deux points de la seconde ;

si $EA \cdot EB = EC \cdot ED$, alors les quatre points ABCD appartiennent à une même circonférence.

En effet, la circonférence qui passe par A, B et C coupe la droite EC en un point D' tel que :

$$EA \cdot EB = EC \cdot ED'$$

Réciproque de la propriété 1

Soient E le point de concours de deux droites, A et B deux points de la première, C et D deux points de la seconde ;

si $EA \cdot EB = EC \cdot ED$, alors les quatre points ABCD appartiennent à une même circonférence.

En effet, la circonférence qui passe par A, B et C coupe la droite EC en un point D' tel que :

$$EA \cdot EB = EC \cdot ED'$$

Cette relation comparée avec la relation donnée montre que $ED = ED'$ et par conséquent D' est confondu avec D

Réciproque du corollaire de la propriété 1

Soient E le point de concours de deux droites, A et B deux points de la première, C un point de la seconde ;

si $EA \cdot EB = EC^2$, alors les trois points A, B, C appartiennent à une circonférence tangente en C à EC.

Réciproque du corollaire de la propriété 1

Soient E le point de concours de deux droites, A et B deux points de la première, C un point de la seconde ;

si $EA \cdot EB = EC^2$, alors les trois points A, B, C appartiennent à une circonférence tangente en C à EC.

Supposons que la circonférence passant par A, B et C coupe la droite EC en un second point C' ; on aurait :

$$EA \cdot EB = EC \cdot EC'$$

Réciproque du corollaire de la propriété 1

Soient E le point de concours de deux droites, A et B deux points de la première, C un point de la seconde ;

si $EA \cdot EB = EC^2$, alors les trois points A, B, C appartiennent à une circonférence tangente en C à EC.

Supposons que la circonférence passant par A, B et C coupe la droite EC en un second point C' ; on aurait :

$$EA \cdot EB = EC \cdot EC'$$

or

$$EA \cdot EC = EC^2$$

Réciproque du corollaire de la propriété 1

Soient E le point de concours de deux droites, A et B deux points de la première, C un point de la seconde ;

si $EA \cdot EB = EC^2$, alors les trois points A, B, C appartiennent à une circonférence tangente en C à EC.

Supposons que la circonférence passant par A, B et C coupe la droite EC en un second point C' ; on aurait :

$$EA \cdot EB = EC \cdot EC'$$

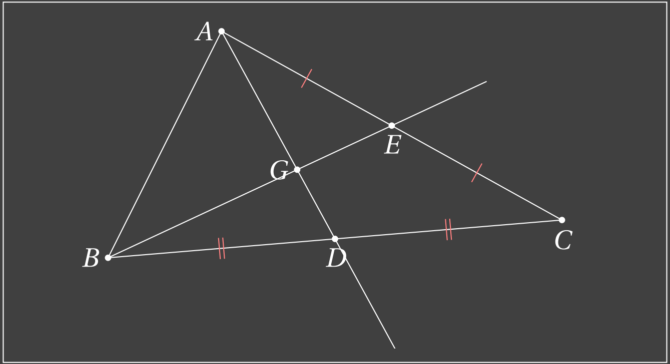
or

$$EA \cdot EC = EC^2$$

$\Longrightarrow EC' = EC$ et donc C' est confondu avec C

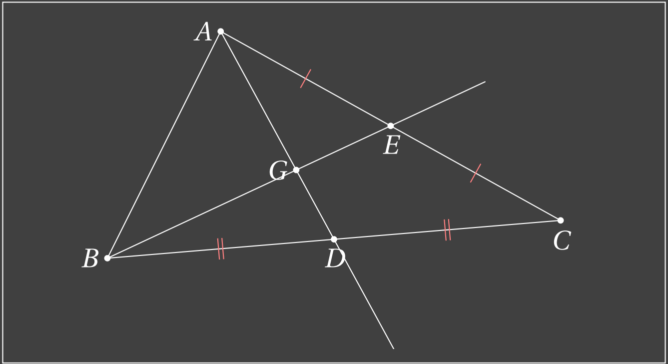
Propriété 2

Les médianes d'un triangle se coupent en un même point, situé aux deux tiers de chacune d'elles à partir des sommets du triangle.



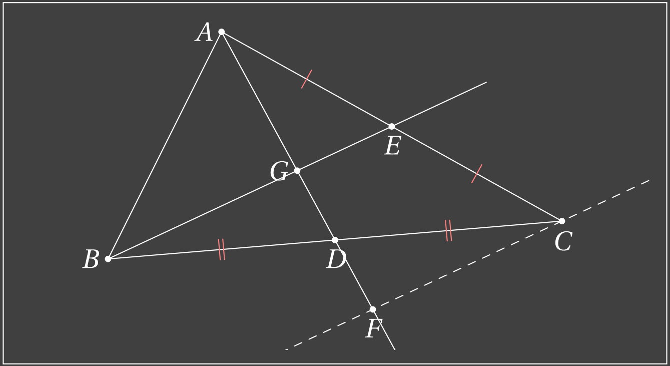
Propriété 2

$$BG = \frac{2}{3} \cdot BE \qquad \text{et} \qquad AG = \frac{2}{3} \cdot AD$$



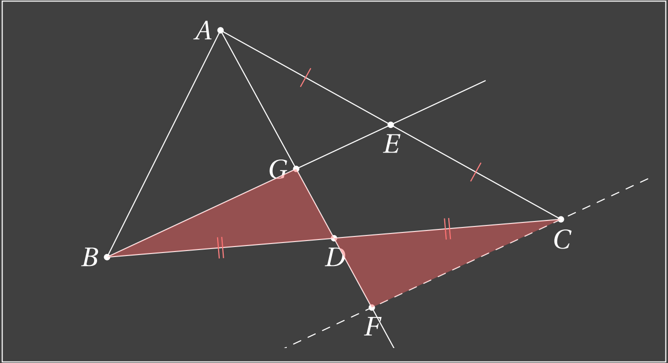
Propriété 2

Par le point C, on trace la parallèle à BE qui rencontre le prolongement de AD en F



Propriété 2

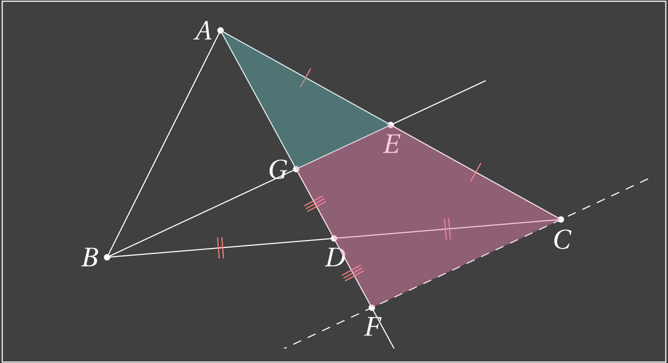
Les deux triangles BDG et CDF sont égaux, car ils ont deux angles égaux et un coté égal $\Longrightarrow GD = DF$



Propriété 2

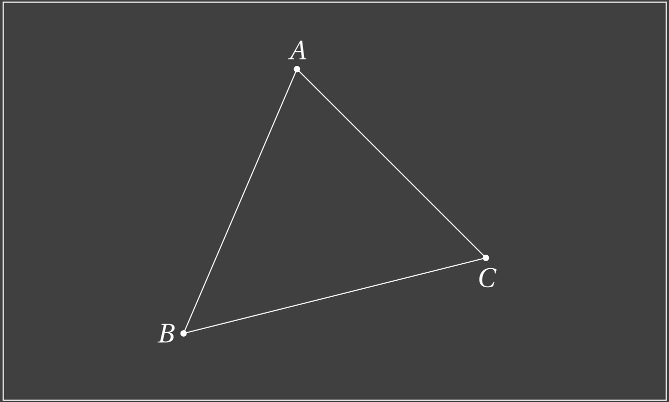
ΔACF et ΔAEG sont deux triangles semblables ($d_{GE} \parallel d_{FC}$). Comme $AE = EC$, on a $AG = GF$ (et aussi $2 \cdot GE = FC$).

Par conséquent, $2 \cdot DG = AG$ et $AG = 2/3\, AD$ $\square$



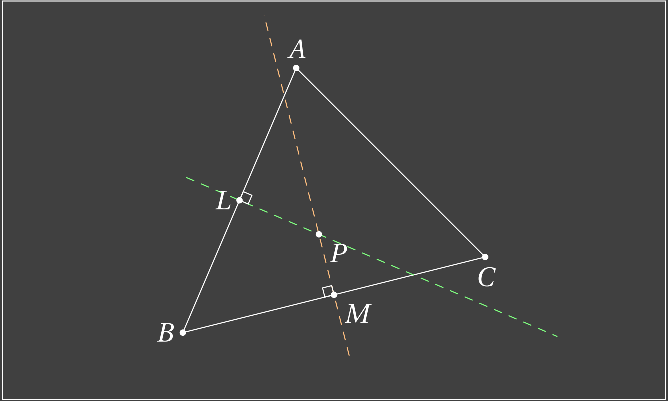
Propriété 3

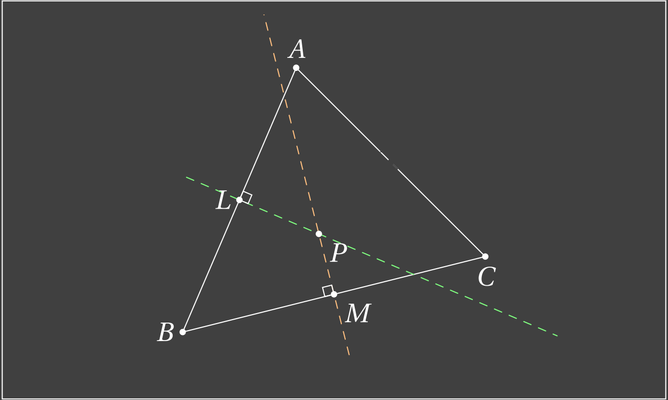
Les médiatrices d'un triangle se coupent en un même point , équidistant des trois sommets



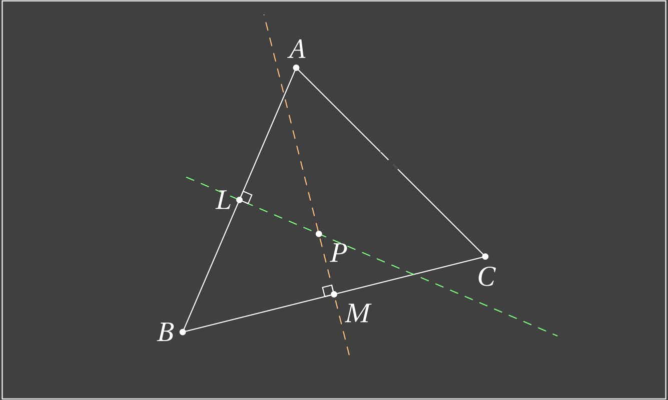
Propriété 3

Soit P le point d'intersection des médiatrices de AB et BC

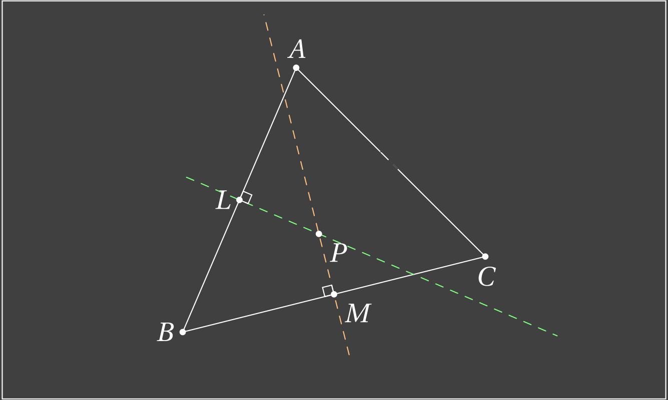




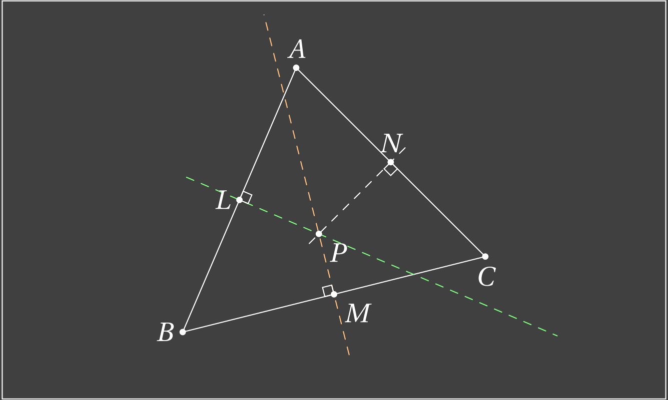
- On a $PA = PB$ et $PB = PC$



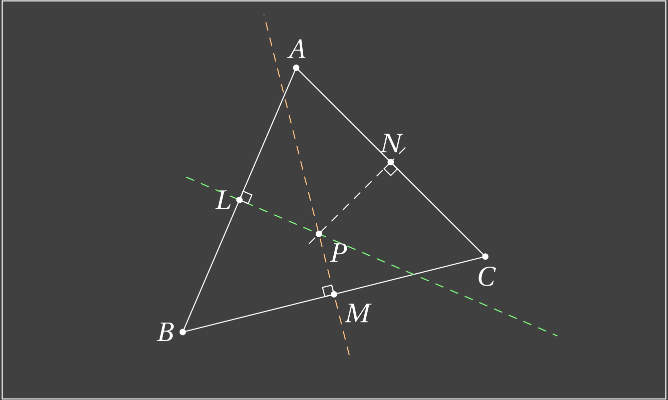
- On a $PA = PB$ et $PB = PC$
- $\Longrightarrow PA = PC$



- On a $PA = PB$ et $PB = PC$
- $\Longrightarrow PA = PC$
- $\Longrightarrow P$ appartient à la médiatrice de AC

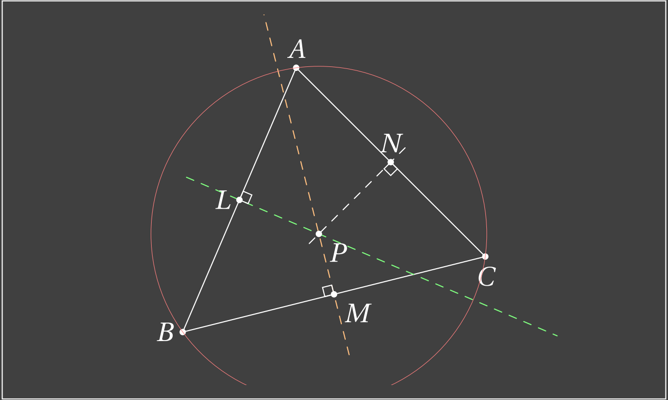


- On a $PA = PB$ et $PB = PC$
- $\implies PA = PC$
- $\implies P$ appartient à la médiatrice de AC



- On a $PA = PB$ et $PB = PC$
- $\implies PA = PC$
- $\implies P$ appartient à la médiatrice de AC

Les médiatrices d'un triangle se coupent en un même point



- On a $PA = PB$ et $PB = PC$
- $\implies PA = PC$
- $\implies P$ appartient à la médiatrice de AC

Ce point P est le centre du cercle circonscrit au triangle

Propriété 4

Les trois hauteurs d’un triangle quelconque sont toujours concourantes. Le point de concours est appelé l’orthocentre du triangle

- Trace un triangle ABC quelconque.

Propriété 4

Les trois hauteurs d'un triangle quelconque sont toujours concourantes. Le point de concours est appelé l'orthocentre du triangle

- Trace un triangle ABC quelconque.
- Trace ses trois hauteurs.

Propriété 4

Les trois hauteurs d'un triangle quelconque sont toujours concourantes. Le point de concours est appelé l'orthocentre du triangle

- Trace un triangle ABC quelconque.
- Trace ses trois hauteurs.
- Trace les 3 droites qui passent par chacun des 3 sommets et qui sont parallèles au côté opposé à ce sommet.

Propriété 4

Les trois hauteurs d'un triangle quelconque sont toujours concourantes. Le point de concours est appelé l'orthocentre du triangle

- Trace un triangle ABC quelconque.
- Trace ses trois hauteurs.
- Trace les 3 droites qui passent par chacun des 3 sommets et qui sont parallèles au côté opposé à ce sommet.
- Ces trois droites se coupent en E, F et G.

Propriété 4

Les trois hauteurs d'un triangle quelconque sont toujours concourantes. Le point de concours est appelé l'orthocentre du triangle

- Trace un triangle ABC quelconque.
- Trace ses trois hauteurs.
- Trace les 3 droites qui passent par chacun des 3 sommets et qui sont parallèles au côté opposé à ce sommet.
- Ces trois droites se coupent en E, F et G.

Propriété 4

Les trois hauteurs d'un triangle quelconque sont toujours concourantes. Le point de concours est appelé l'orthocentre du triangle

- Trace un triangle ABC quelconque.
- Trace ses trois hauteurs.
- Trace les 3 droites qui passent par chacun des 3 sommets et qui sont parallèles au côté opposé à ce sommet.
- Ces trois droites se coupent en E, F et G.

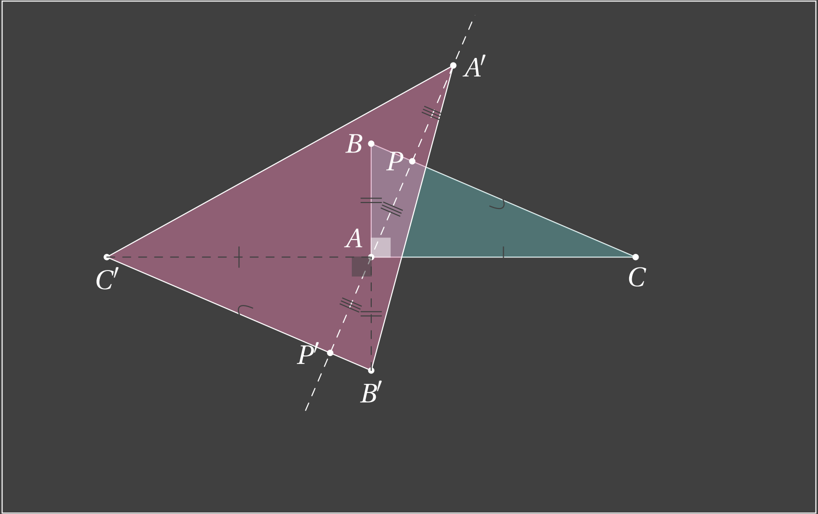
A ton avis que représentent les hauteurs de ABC pour le triangle EFG ? Prouve-le !

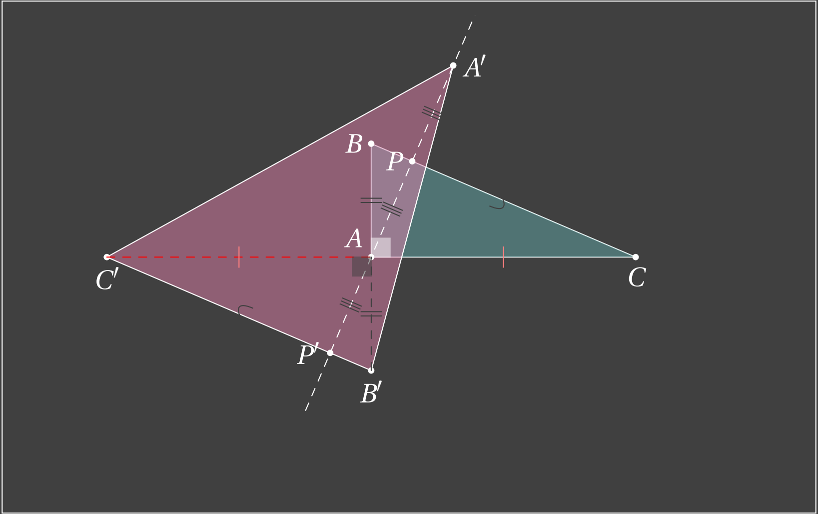
EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2018

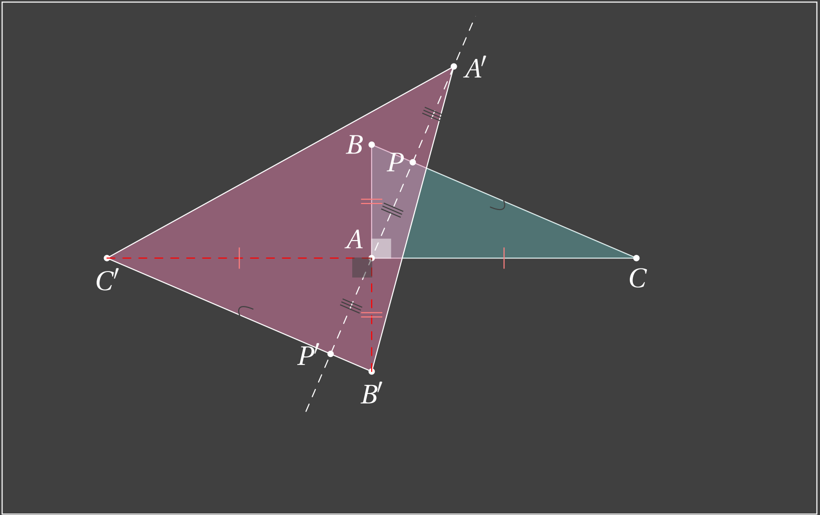
Soit ABC un triangle rectangle en A. Soient A' le symétrique du point A par rapport à la droite BC, B' le symétrique du point B par rapport à la droite AC, et C' le symétrique du point C par rapport à la droite AB.

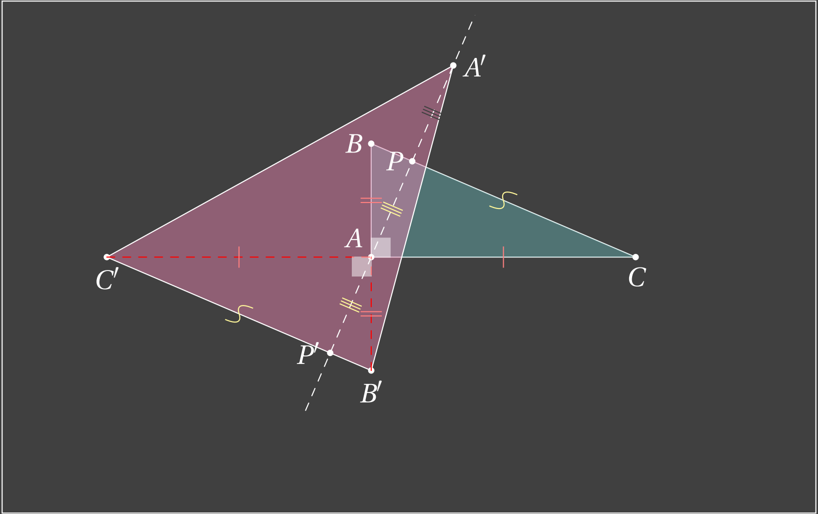
Soient P le pied de la perpendiculaire à BC abaissée de A et P' le pied de la perpendiculaire à $B'C'$ abaissée de A'

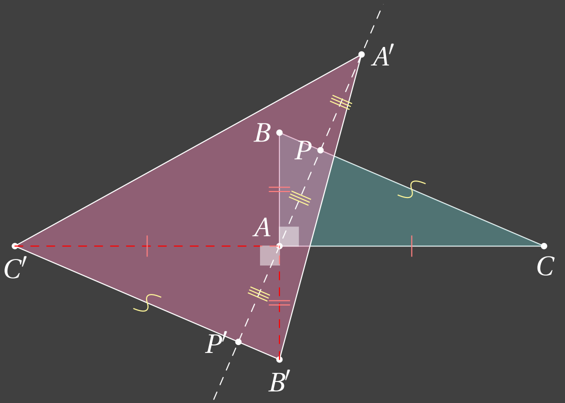
- Calculer la longueur d' du segment $[A'P']$ en fonction de la longueur d du segment $[AP]$
- Calculer l'aire S' du triangle $A'B'C'$ en fonction de l'aire S du triangle ABC


A′
B
P
A
C′
C
P′
B′


A′
B
P
A
C′
C
P′
B′


A′
B
P
A
C′
C
P′
B′


A′
B
P
A
C′
C
P′
B′



A′
B
P
A
C′
C
P′
B′

Solution

- Par construction, $\overline{C'A} = \overline{AC}, \overline{B'A} = \overline{AB}$ et $CC' \perp BD$
  Le triangle $C'AB'$ est donc un triangle rectangle en A et isométrique au triangle ABC
  $$\Longrightarrow \overline{P'A} = \overline{AP} \text{ et } \overline{B'C'} = \overline{BC}$$
  On a aussi $\overline{PA'} = \overline{AP}$ car A' est le symétrique orthogonal de A
  $$\Longrightarrow \overline{P'A'} = 3\overline{PA} \Longrightarrow d' = 3d$$
- $S_{ABC} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AP}}{2}$ et $S_{ABC'} = \frac{\overline{B'C'} \cdot \overline{A'P'}}{2}$
  $$\Longrightarrow \frac{S'}{S} = \frac{\overline{B'C'} \cdot \overline{A'P'}}{\overline{BC} \cdot \overline{AP}} = 3$$