LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ
Prof. Vincent DENOËL

ADMISSION AUX ÉTUDES D'INGÉNIEUR CIVIL
ÉPREUVE D'ANALYSE

Septembre 2017

Consignes :
- *Répondez aux trois questions sur des feuilles séparées.*
  Si vous ne répondez pas à une question, remettez une feuille blanche.
- *Inscrivez vos NOM, prénom et numéro d'ordre sur chaque feuille.*
- *L'examen se termine à 16h30.*

Question I

On considère la fonction

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 + a)$$

où a désigne un paramètre réel strictement positif. En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de a,

i. déterminez le domaine de définition de f ;
ii. déterminez sa parité éventuelle ;
iii. déterminez les éventuelles asymptotes du graphe de f ;
iv. étudiez la croissance/décroissance de f et caractérisez ses éventuels extrema ;
v. esquissez le graphe de f.

Question II

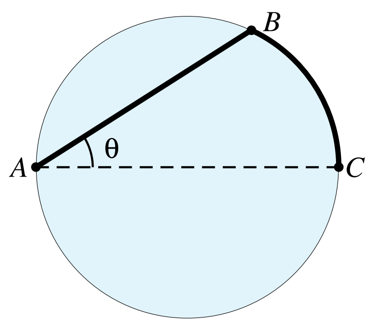
On considère les intégrales

$$S_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x \, dx \qquad \text{et} \qquad C_n = \int_0^{\pi/2} x^n \cos x \, dx$$

i. Calculez C_0.
ii. Calculez S_1.
iii. Montrez que, pour tout $n > 0$,
$$C_n = \alpha^n - nS_{n-1}$$
où α désigne une constante à déterminer.
iv. De ce qui précède, déduisez la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \left(\arcsin x\right)^2 dx$.

Question III

Un canard se trouvant en A au bord d'un lac circulaire de rayon R souhaite atteindre le point C diamétralement opposé du lac. Pour ce faire, il peut nager en ligne droite de A à C, marcher le long de la berge de A à C ou nager en ligne droite depuis son point de départ jusqu'à un point intermédiaire B situé sur la berge puis marcher le long du bord de B à C (voir figure).



Sachant que ce canard marche deux fois plus vite qu'il ne nage, déterminez la trajectoire la plus rapide pour atteindre le point C. Justifiez.

Solution type

Question I

i. Quelle que soit la valeur du paramètre a, la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2+a)$ est définie $\forall x \in \mathbb{R}$. On a donc $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$.

ii. Puisque, quelle que soit la valeur du paramètre a,

$$f(-x) = \mathrm{e}^{x}(x^2+a) \begin{cases} \neq +f(x) \\ \neq -f(x) \end{cases}$$

la fonction n'est ni paire, ni impaire.

iii.
- La fonction ne présente pas d'asymptote verticale puisque son domaine est $\mathbb{R}$.
- Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}(x^2+a) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+a}{\mathrm{e}^x} = \text{“}\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\text{”} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\mathrm{e}^x} = \text{“}\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\text{”} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^x} = 0 \end{aligned}$$

  où les indéterminations successives sont levées en appliquant la règle de l'Hospital. De façon alternative, ce résultat peut être obtenu en se basant sur le fait que l'exponentielle e^{-x} domine n'importe quelle puissance de x au voisinage de l'infini.
  Plus précisément, la fonction f étant strictement positive sur son domaine de définition, on a, quelle que soit la valeur du paramètre a,

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}(x^2+a) = 0^+$$

  La fonction présente donc l'asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$ qu'elle approche par le dessus.
- Au voisinage de $-\infty$, on a, quelle que soit la valeur du paramètre a,

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}(x^2+a) = +\infty$$

  La fonction ne présente donc pas d'asymptote horizontale en $-\infty$.
  Pour identifier la présence d'une éventuelle asymptote oblique, on calcule

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}\frac{x^2+a}{x} = -\infty$$

  et la fonction ne présente donc pas non plus d'asymptote oblique en $-\infty$.

iv. La dérivée de f est donnée par

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}(x^2+a) + \mathrm{e}^{-x}(2x) = \mathrm{e}^{-x}(-x^2+2x-a)$$

Ses zéros sont obtenus en résolvant l'équation du second degré

$$-x^2+2x-a = 0$$

dont le discriminant est donné par

$$\rho = 4-4a = 4(1-a)$$

On distingue donc les cas suivants.

$\boxed{0 < a < 1}$ Le discriminant est positif et f' possède les deux zéros

$$x_1 = 1 - \sqrt{1-a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = 1 + \sqrt{1-a}$$

Les variations de f sont décrites par

x		x_1		x_2	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$

La fonction étant décroissante à gauche de x_1 et croissante à sa droite, elle présente un minimum local en ce point. La fonction f présente un maximum local en x_2 puisqu'elle est croissante à gauche et décroissante à droite.

$\boxed{a = 1}$ Dans ce cas, le discriminant est nul et la dérivée s'annule uniquement en $x = 1$. On a

x		1	
f'	$-$	0	$-$
f	$\searrow$	Tangente horizontale	$\searrow$

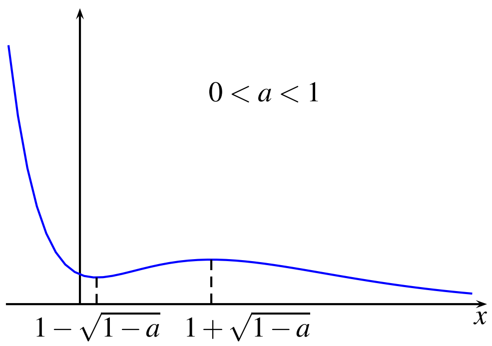
La fonction ne présente aucun extremum local. Elle est décroissante sur l'ensemble de son domaine.

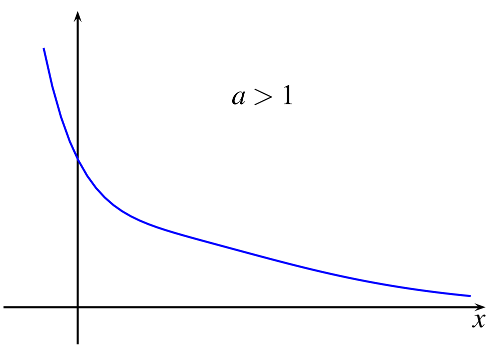
$\boxed{a > 1}$ Dans ce cas, le discriminant est négatif et la dérivée ne s'annule pas. On a

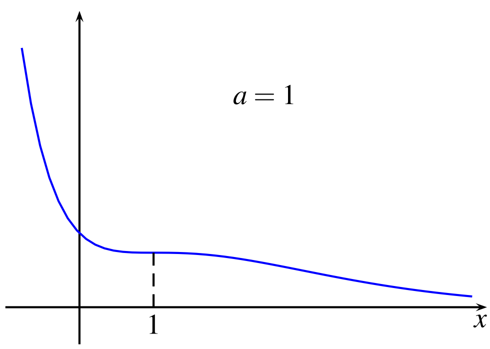
x			
f'	$-$	$-$	$-$
f	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

La fonction ne présente aucun extremum local. Elle est décroissante sur l'ensemble de son domaine.

v. En fonction des résultats précédents et, en particulier, de la discussion menée au point précédent, on peut esquisser le graphe de f de la façon suivante en tenant compte du fait que $f > 0$ sur $\mathbb{R}$ et en distinguant les cas $0 < a < 1$, $a = 1$ et $a > 1$:







Question II

i.

$$C_0 = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

ii.

$$S_1 = \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$$

Par application de la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f g' dx = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f' g \, dx$$

avec

$$\begin{cases} f = x \\ g' = \sin x \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = 1 \\ g = -\cos x \end{cases}$$

on obtient

$$S_1 = \Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = C_0 = 1$$

iii. $\forall n > 0$,

$$C_n = \int_0^{\pi/2} x^n \cos x \, dx$$

Par application de la formule d'intégration par parties avec

$$\begin{cases} f = x^n \\ g' = \cos x \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = nx^{n-1} \\ g = \sin x \end{cases}$$

on obtient

$$C_n = \Big[x^n \sin x\Big]_0^{\pi/2} - n \int_0^{\pi/2} x^{n-1} \sin x \, dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - nS_{n-1}$$

qui est la relation donnée avec $\alpha = \pi/2$.

iv. L'intégrale

$$\int_0^1 \big(\arcsin x\big)^2 dx$$

peut être transformée par le changement de variable $x = \sin t$, ($dx = \cos t \, dt$) en

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big[\arcsin(\sin t)\big]^2 \cos t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos t \, dt = C_2$$

où, en utilisant les résultats des points ii. et iii.,

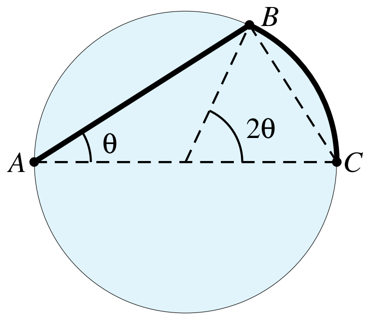
$$C_2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2S_1 = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

Question III

En s'appuyant sur la signification de l'angle θ, on remarque tout d'abord que seules les valeurs de $\theta \in [0, \pi/2]$ doivent être considérées. Le cas $\theta = 0$ correspond à la nage en ligne droite de A à C, alors que, pour $\theta = \pi/2$, le canard ne fait que marcher le long de la berge.

Conformément à l'énoncé du problème, on note v la vitesse de nage du canard et $2v$ sa vitesse de marche.

D'une part, le triangle ABC étant rectangle en B, on a



$$|AB| = |AC|\cos\theta = 2R\cos\theta$$

et le temps de parcours du segment AB à la vitesse v est donné par

$$t_{AB} = \frac{|AB|}{v} = \frac{2R\cos\theta}{v}$$

D'autre part, l'angle au centre interceptant l'arc $\overset{\frown}{BC}$ étant le double de l'angle inscrit θ, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ est égale à $2\theta R$ et le temps de parcours correspondant, à la vitesse $2v$ est donné par

$$t_{BC} = \frac{2\theta R}{2v} = \frac{\theta R}{v}$$

Au total, le temps de parcours le long de la trajectoire ABC est donc égal à

$$t(\theta) = t_{AB} + t_{BC} = \frac{2R\cos\theta}{v} + \frac{\theta R}{v}$$

Afin d'identifier la trajectoire la plus rapide, étudions les variations de cette fonction pour $\theta \in [0, \pi/2]$. On calcule

$$t'(\theta) = -\frac{2R\sin\theta}{v} + \frac{R}{v}$$

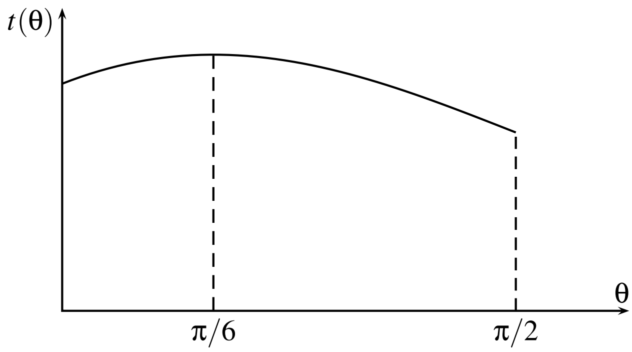
dont le seul zéro dans l'intervalle $[0, \pi/2]$ est donné par

$$\sin\theta^\star = \frac{1}{2} \qquad \text{soit} \qquad \theta^\star = \frac{\pi}{6}$$

Les variations de $t(\theta)$ sont donc décrites par

θ	0		$\pi/6$		$\pi/2$
$t'(\theta)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
t	$\nearrow$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	$\searrow$

De ce tableau, il ressort que le temps de parcours est maximum pour $\theta = \pi/6$ et présente l'allure suivante



Le minimum recherché est donc réalisé aux bornes de l'intervalle, *i.e.* pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi/2$. En comparant les valeurs correspondantes du temps de parcours

$$t(0) = \frac{2R}{v} \qquad \text{et} \qquad t(\pi/2) = \frac{\pi R}{2v}$$

on en déduit que celui-ci est minimum pour $\theta = \pi/2$. Le trajet le plus rapide est donc réalisé en marchant le long de la berge du point A au point C.