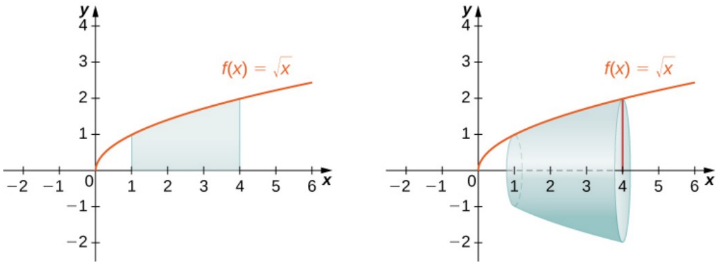
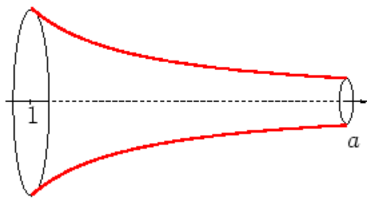
Exercices

1 Calculez le volume de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la région du plan hachurée ci-contre ?



SOLUTION : $V = \pi \int_1^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{15\pi}{2}$ u.v. (unité de volume)

2 On considère l'entonnoir constitué en prenant la courbe $y = \frac{1}{x}$ et en la tournant autour de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1; a]$ comme montré sur la figure suivante :



(a) Calculer le volume de révolution de cet entonnoir en fonction de a

SOLUTION : $V_a = \pi \int_1^a \left(\frac{1}{x}\right)^2 \, \mathrm{d}x = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\pi$ u.v. (unité de volume)

(b) Que devient ce volume lorsque $a \to +\infty$

SOLUTION : $V_{+\infty} = \pi \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 \, \mathrm{d}x = \lim_{a \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{a}\right)\pi = \pi$

La trompette de Gabriel ou solide hyperbolique aigu est une surface de révolution, définie en faisant tourner une portion d'hyperbole autour d'une de ses asymptotes, et en la coupant par un plan orthogonal à l'axe. Ce solide est de longueur infinie dans une direction, sa surface est également infinie, mais son volume est, quant à lui, fini. (source : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Trompette_de_Gabriel`)

3 Trouvez le volume du solide de révolution obtenu en faisant tourner la région située sous $y = e^{5x}$, de $x = 0$ à $x = 1$, autour de l'axe des x.

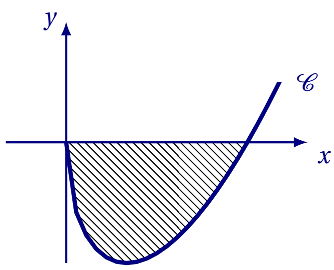
SOLUTION :

$$\int_0^1 \pi (e^{5x})^2 dx = \int_0^1 \pi e^{10x} dx = \frac{\pi}{10} e^{10x} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{10}(e^{10} - 1)$$

4 On considère la surface **finie** S délimitée par la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(x-3)$ et l'axe des abscisses. Calculez le volume du solide engendré par la rotation de S autour de l'axe des abscisses.

SOLUTION : La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en 0 et 3 : c'est entre ces deux bornes que l'on considère la surface finie S qui engendrera le solide de révolution (et définira les bornes de l'intégrale définie).

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{3}\sqrt{x}(x-3)\right)^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^3 \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$



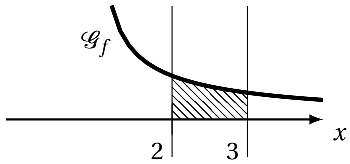
5 Calculez le volume engendré par la rotation autour de l'axe des x de la surface comprise entre la parabole $y = -x^2 - 3x + 10$ et la droite $y = 7 - x$

SOLUTION : intersection : $-x^2 - 3x + 10 = 7 - x \iff x = -3$ ou $x = 1$
il faut vérifier que f et g soient continues et positives sur l'intervalle $[-3, 1]$
volume de révolution :

$$V = \pi \int_{-3}^{1} \left(-x^2 - 3x + 10\right)^2 - (7 - x)^2 \; \mathrm{d}x = \frac{1024}{5}\pi$$

6 Calculer le volume du solide de révolution engendré par la surface suivante $(2 \leq x \leq 3)$.

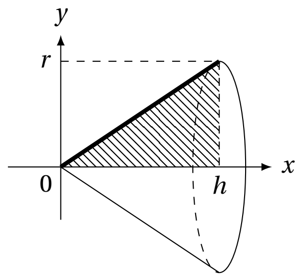
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$



SOLUTION : Volume :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_2^3 \frac{1}{x^2 - 1} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\int_2^3 \frac{1}{x - 1} \, \mathrm{d}x - \int_2^3 \frac{1}{x + 1} \, \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\ln|x - 1| \Big|_2^3 - \ln|x + 1| \Big|_2^3 \right) = \frac{\ln(3/2)\pi}{2} \approx 0,636903 \end{aligned}$$

7 Trouvez le volume d'un cône droit de rayon r et de hauteur h. Ce solide de révolution est obtenu en faisant tourner la courbe $y = \left(\frac{r}{h}\right) x$ de $x = 0$ à $x = h$ autour de l'axe des x.

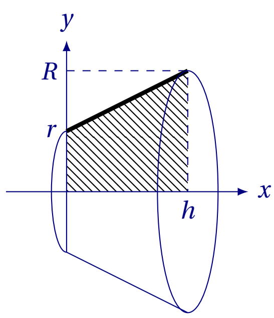


SOLUTION : Le volume recherché est

$$\int_0^h \pi \left[\left(\frac{r}{h} \right) x \right]^2 dx = \pi \left(\frac{r^2}{h^2} \right) \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

8 Calculer le volume d'un tronc de cône de hauteur h dont une base a pour rayon r et l'autre base R.

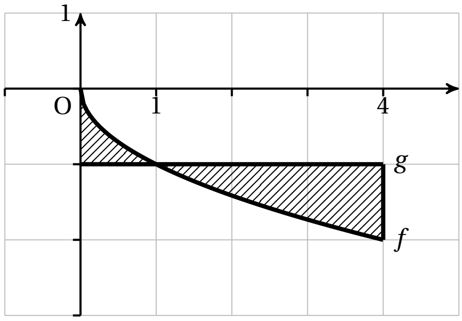
SOLUTION :



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h f^2(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi \mathrm{h}}{3(\mathrm{R} - \mathrm{r})} \left(\mathrm{R}^3 - \mathrm{r}^3 \right) \\ &= \frac{\pi \mathrm{h}}{3} \left(\mathrm{R}^2 + R \cdot r + \mathrm{r}^2 \right) \end{aligned}$$

9 Calculez le volume de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la région du plan hachurée ci-dessous ? On reconnaitra le graphe des fonctions

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, ; \, x \mapsto -\sqrt{x} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, ; \, x \mapsto -1$$



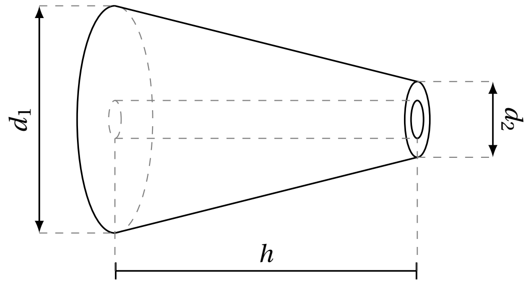
SOLUTION : $V = \pi \int_0^1 \left(g^2 - f^2\right)(x)\,\mathrm{d}x + \pi \int_1^4 \left(f^2 - g^2\right)(x)\,\mathrm{d}x$

$$= \pi \int_0^1 1 - x\,\mathrm{d}x + \pi \int_1^4 x - 1\,\mathrm{d}x$$

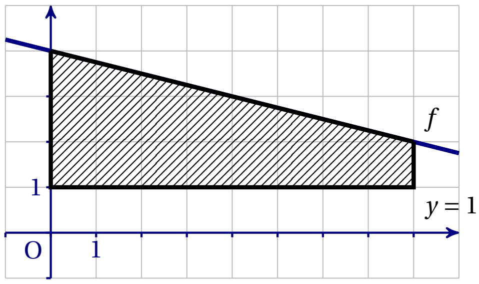
$$= \pi \left(x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2} - x\Big|_1^4 \right)$$

$$= 5\pi$$

10 La figure ci-contre montre un tronc de cône que l'on a évidé en perçant un trou cylindrique au travers de celui-ci suivant son axe de symétrie. Le diamète de la grande base circulaire vaut $d_1 = 8$ cm tandis que celui de la petite vaut $d_2 = 4$ cm. Calculer le volume du solide de révolution évidé sachant que $h = 8$ cm et que le diamètre du trou vaut 2 cm.



SOLUTION :



$$V = \pi \int_0^8 f^2(x) - 1^2\,\mathrm{d}x$$

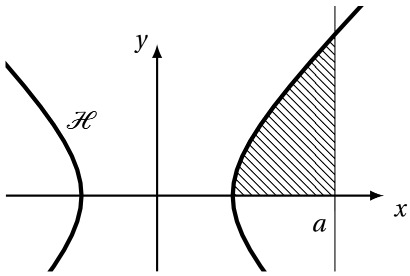
$$= \pi \int_0^8 \left(4 - \frac{1}{4}x\right)^2 - 1\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi \left(\frac{x^3}{48} - x^2 + 15x \Big|_0^8 \right)$$

$$= \frac{200\pi}{3}$$

11 On rappelle que la tangente à l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $x^2 - y^2 = 1$ au point $M_0\left(x_0, y_0\right) \in \mathscr{H}$ a pour équation $x_0\,x - y_0\,y = 1$

1. Calculez le volume V engendré par la rotation autour de l'axe des x de la surface hachurée ci-contre en fonction du réel $a > 1$.
2. Écrivez l'équation de la tangente à $\mathscr{H}$ **en son point** d'abscisse a si on fixe $V = \frac{20\pi}{3}$



SOLUTION : $\mathscr{H} \cap Ox = \{(-1,0);(1,0)\}$

1. Pour $x>0$ et $y \geq 0$: $x^2-y^2=1 \implies y=\sqrt{x^2-1}$

   Le volume est : $V=\pi\int_1^a y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_1^a x^2-1\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{a^3}{3}-a-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$

$$\boxed{V=\pi\frac{a^3-3a+2}{3}}$$

2. $\pi\frac{a^3-3a+2}{3}=\frac{20\pi}{3} \iff (a-3)\left(a^2+3a+6\right)=0 \iff a=3$

   On doit donc écrire l'équation de la tangente à $\mathscr{H}$ **en son point** d'abscisse 3

   Or, $\mathscr{H} \cap d \equiv x=3 \iff 9-y^2=1 \iff y=\pm 2\sqrt{2}$

   Il y a donc **deux** points d'abscisse 3 : $M_0\left(3,2\sqrt{2}\right) \in \mathscr{H}$ et $M_0'\left(3,-2\sqrt{2}\right) \in \mathscr{H}$

   Les tangentes demandées sont :

$$\boxed{T \equiv 3x-2\sqrt{2}y=1} \text{ et } \boxed{T' \equiv 3x+2\sqrt{2}y=1}$$