13 Optimisation

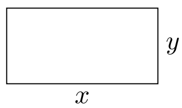
Marche à suivre

1) Exprimer la quantité à optimiser comme fonction d'une ou plusieurs variables.
2) Chercher, s'il y a lieu, des relations entre les variables.
3) Formuler la quantité à optimiser comme fonction d'une seule variable et déterminer le domaine de définition de cette variable.
4) Déterminer l'extremum de la fonction à analyser, sans omettre de contrôler ce qui passe aux extrémités du domaine de définition.
5) Formuler la réponse.

Exemple

Un homme dispose de 100 m de clôture pour délimiter un terrain rectangulaire. Quelles devront être les dimensions du terrain pour que son aire soit maximale ? Calculer cette aire maximale.

1) Désignons par les variables x et y la longueur et la largeur du terrain rectangulaire.
   Alors l'aire du terrain s'exprime par $f(x, y) = x\,y$.



2) Puisque l'on dispose de 100 m de clôture, les variables x et y sont liées par la relation $100 = 2\,x + 2\,y$.

3) Cette dernière condition implique $y = 50 - x$.
   En remplaçant y par $50 - x$ dans la fonction à maximiser, on obtient une fonction d'une seule variable : $f(x) = x\,(50 - x)$.
   Vu que la longueur du terrain ne être comprise qu'entre 0 m et 50 m, le domaine de définition de la fonction f est ici $\mathrm{D}_f = [0\,;50]$.

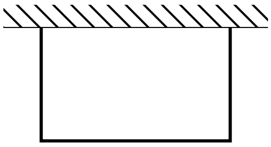
4) Déterminons la valeur maximale de la fonction $f(x) = x\,(50 - x)$ sur l'intervalle $\mathrm{D}_f = [0\,;50]$.
   $f'(x) = \big(x\,(50 - x)\big)' = (50\,x - x^2)' = 50 - 2\,x$

		25	
$50 - 2\,x$	$+$	0	$-$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$

   $f(25) = 25 \cdot (50 - 25) = 625$
   $f(0) = 0 \cdot (50 - 0) = 0$
   $f(50) = 50 \cdot (50 - 50) = 0$

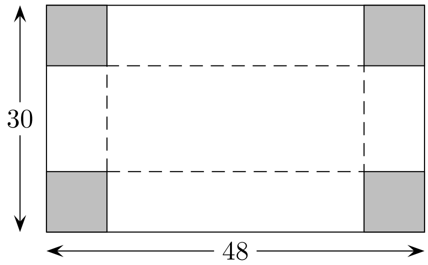
5) L'aire du terrain est maximale si sa longueur vaut $x = 25$ m.
   Dans ce cas, le terrain a une largeur de $y = 50 - x = 50 - 25 = 25$ m et une aire de $f(25) = 625$ m^2.
   On remarque que le terrain rectangulaire d'aire maximale est un carré.

13.1 Un éleveur désire enclore un terrain rectangulaire bordant une rivière rectiligne. Il dispose de 1000 m de fil de fer barbelé, et ne désire pas clôturer le côté longeant la rivière. Calculer la surface maximale qu'il peut enclore.

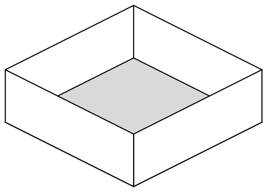


13.2 Une société immobiliaire possède 180 studios qui sont tous loués lorsqu'elle demande 240 francs de loyer par mois. La société sait que chaque tranche de 8 francs supplémentaires de loyer laisse 5 studios inoccupés. À combien doit-elle fixer le loyer pour maximiser ses revenus bruts ?

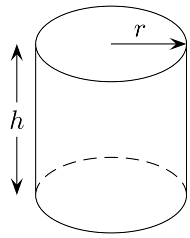
13.3 On enlève un carré à chaque coin d'une pièce de carton rectangulaire de 30 cm × 48 cm et on relève ensuite les rectangles latéraux pour former une boîte sans couvercle. Quelle doit être la dimension du carré enlevé pour obtenir la boîte de volume maximal ?



13.4 Quelles doivent être les dimensions d'une boîte de base carrée sans couvercle de contenance un litre pour que sa construction demande un minimum de matériau ?



13.5 Quelle doit être la relation entre la hauteur h et le rayon r d'un cylindre circulaire droit, fermé aux extrémités et de volume V, pour que sa fabrication nécessite le moins de matériau possible ?
Les dimensions d'une cannette de boisson gazeuse vérifient-elles cette relation ?

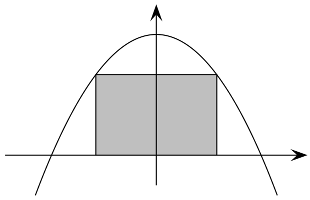


13.6 La nouvelle bibliothèque du collège de forme rectangulaire doit avoir une superficie de 2 400 m^2. Trois des murs sont faits de brique, tandis que la face sud est faite de panneaux de verre. Le prix linéaire du verre est le double de celui de la brique. Trouver les dimensions de la bibliothèque pour que le coût des matériaux soit minimal.

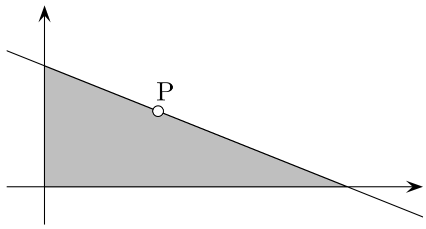
13.7 Une feuille de papier doit contenir 540 cm^2 de texte imprimé. Les marges supérieure et inférieure doivent avoir 5 cm chacune, et celle de côté 3 cm chacune. Déterminer les dimensions de la feuille de papier pour lesquelles il faudra un minimum de papier.

13.8 On veut couper, s'il y a lieu, une corde de 200 cm de longueur en deux parties. La première partie servira à former un carré et la seconde partie, un cercle. Où faut-il couper cette corde pour que la somme des aires des figures obtenues soit maximale ?

13.9 Soit la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}\,x^2 + 4$. Sachant que le rectangle grisé a une aire maximale, déterminer ses dimensions.



13.10 On considère une famille de droites de pente négative passant par le point $\mathrm{P}(3\,;2)$. Pour quelle droite de la famille le triangle délimité par la droite et les axes de coordonnées a-t-il la plus petite aire ?

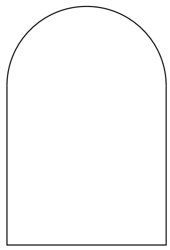


13.11 Trouver les dimensions du rectangle de surface maximale que l'on peut inscrire dans un cercle de 1 cm de rayon.

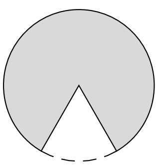
13.12 Soit un triangle isocèle dont le périmètre est égal à 12 cm. Déterminer ses côtés pour que son aire soit maximale.

13.13 Soit $f(x) = \frac{1}{4}\,x^2$ où $x \in [-3\,;4]$. Déterminer les points du graphe de f qui sont les plus près et les plus loin du point $\mathrm{P}(0\,;3)$.

13.14 Une fenêtre romane a la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle. Le périmètre du rectangle étant de 6 m, déterminer les dimensions de la fenêtre qui laissent passer le plus de lumière.



13.15



On forme un cône en coupant un secteur d'un cercle dont le rayon est de 20 cm. Déterminer la hauteur du cône de volume maximal ainsi formé.

13.16 Vous êtes dans un champ boueux à 300 m d'une route ; la distance est mesurée perpendiculairement d'un point A sur cette route. Vous désirez vous rendre à votre véhicule situé à 600 m du point A et vous vous déplacez à une vitesse de 3 m/s dans la boue du champ et à 5 m/s sur le pavé de la route. Quel est le temps minimum pour rejoindre votre voiture (sans tenir compte du temps que vous pouvez mettre à faire des calculs !) ?

Réponses

13.1 Dimensions de l'enclos : 500 m $\times$ 250 m, surface maximale : 125 000 m^2

13.2 264 francs

13.3 Il faut enlever un carré de 6 cm de côté.

13.4 Les dimensions de la boîte de surface minimale sont $\sqrt[3]{2}$ dm et $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ dm.

13.5 $h = 2\,r$

13.6 Dimensions de la bibliothèque : 60 m $\times$ 40 m

13.7 Dimensions de la feuille de papier : 40 cm $\times$ 24 cm

13.8 La corde ne doit pas être coupée : elle doit être utilisée en entier pour former le cercle.

13.9 Dimensions du rectangle d'aire maximale : $4 \times \frac{8}{3}$

13.10 $y = -\frac{2}{3}x + 4$

13.11 Carré de $\sqrt{2}$ cm de côté

13.12 Triangle équilatéral dont les côtés mesurent 4 cm.

13.13 Les points les plus près de P sont $(-2\,;1)$ et $(2\,;1)$; le point le plus éloigné de P est $(4\,;4)$.

13.14 La base du rectangle égale $\frac{12}{8-\pi}$ m, la hauteur du rectangle égale $\frac{12-3\,\pi}{8-\pi}$ m et le rayon du demi-cercle égale $\frac{6}{8-\pi}$ m.

13.15 La hauteur du cône est égale à $\frac{20\,\sqrt{3}}{3}$ cm.

13.16 200 secondes