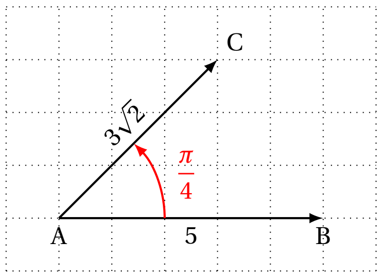
Produit scalaire et trigonométrie

Définition

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

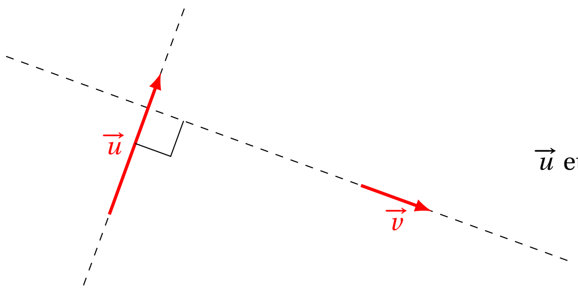
Notation : $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ est l'angle formé par les deux vecteurs.

Il existe d'autres manières d'exprimer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times CD \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right)$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \\ &= 5 \times 3\sqrt{2} \times \cos\frac{\pi}{4} \\ &= 15\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 15.\end{aligned}$$

En général, le produit scalaire n'a pas de signification géométrique particulière, sauf lorsqu'il s'agit de l'orthogonalité entre deux vecteurs.



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\Longleftrightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Un lemme fondamental

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dans tout repère orthonormé, si $\vec{u} = \binom{x}{y}$ et $\vec{v} = \binom{x'}{y'}$, alors :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2(xx' + yy').$$

Démonstration : Il s'agit d'un simple calcul. En effet, $\vec{u} + \vec{v} = \binom{x+x'}{y+y'}$, donc :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 = x^2 + x'^2 + 2xx' + y^2 + y'^2 + 2yy'.$$

Puisque $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ et $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$, on en déduit le résultat.

Source : www.bibmath.net (Démonstrations capes - Produit scalaire et trigonométrie)

Expression du produit scalaire en fonction de la norme

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right).$$

Démonstration : Si $\vec{u} = \vec{0}$ (le vecteur nul), la propriété est claire, car les deux termes de l'égalité sont nuls. Sinon, on se place dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$.

Dans ce repère, les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont respectivement

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \|\vec{u}\| \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} \|\vec{v}\|\cos(\theta) \\ \|\vec{v}\|\sin(\theta) \end{pmatrix},$$

où $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$, l'angle formé par les deux vecteurs.

D'après le lemme fondamental, en calculant dans ce repère :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2\big(\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cos(\theta)\big) = 2\vec{u}\cdot\vec{v}.$$

Expression du produit scalaire dans un repère orthonormal

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dans tout repère orthonormé, si $\vec{u} = \binom{x}{y}$ et $\vec{v} = \binom{x'}{y'}$, alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'.$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate des deux propositions précédentes.

Application pour trouver la mesure d'un angle

Reprenons les vecteurs de l'exemple précédent : $\overrightarrow{u}\binom{5}{-2}$ et $\overrightarrow{v}\binom{1}{7}$.

Nous avons vu que :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = -9.$$

Or,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \\ &= \sqrt{5^2+(-2)^2} \times \sqrt{1^2+7^2} \times \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \\ &= \sqrt{29} \times \sqrt{50} \times \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \\ &= 5\sqrt{58}\cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$-9 = 5\sqrt{58}\cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right),$$

soit :

$$\cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = -\frac{9}{5\sqrt{58}} \approx -0{,}236351579148\,.$$

On en déduit alors :

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \approx 104°.$$

Propriétés du produit scalaire

1. Le produit scalaire est commutatif :
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}.$$
2. Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition de deux vecteurs :
$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}.$$
3. Le produit scalaire est distributif par rapport à la multiplication par un scalaire (par un réel) :
$$(m\vec{u})\cdot(n\vec{v}) = mn \times (\vec{u}\cdot\vec{v}).$$

Exercices

1. Soit $ABCD$ un carré de côté a. Calculer les produits scalaires :
$$p_1 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \quad p_2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}, \quad p_3 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}, \quad p_4 = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB}.$$

2. Soit A et B deux points tels que $AB = a$. On note I le milieu de $[AB]$ et J le symétrique de B par rapport à A. Calculer les produits scalaires :
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}, \quad \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}, \quad \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BJ}.$$

3. Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $AB = AC = 5$ et $BC = 4$. Soit I le milieu de $[BC]$. Calculer le produit scalaire :
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

4. Soit A, B, C trois points tels que $AB = 4$, $AC = 6$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12$. Déterminer la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

5. Soit $ABCD$ un carré de côté a. On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[BC]$. Faire une figure codée en prenant $[AB]$ comme « horizontale », A en bas à gauche, B à droite, C et D au-dessus de $[AB]$. Montrer que $(AJ) \perp (DI)$.

6. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$. Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

7. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$. Déterminer k tel que les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $2\vec{u} + k\vec{v}$ soient orthogonaux.

   On rédigera ainsi : « $\vec{u} + \vec{v}$ et $2\vec{u} + k\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si ... ».

8. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$, C un point quelconque de $\mathscr{C}$ et D un point quelconque de $[AB]$. La droite passant par D et perpendiculaire à $[AB]$ coupe $[AC]$ en E. Démontrer que l'on a : $\overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC}$.

   Indication : calculer de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$.

9. Soit $ABCD$ un parallélogramme. On pose $AB = a$ et $AD = b$. Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ en fonction de a et b.

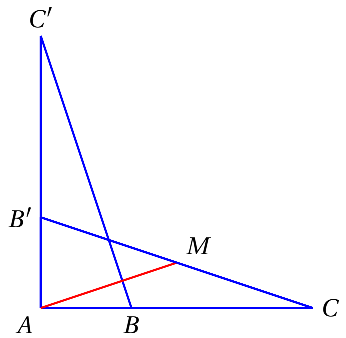
10. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Démontrer que l'on a :
$$AC^2 + BD^2 = 2\left(AB^2 + AD^2\right).$$

11. Soit ABC un triangle équilatéral de côté $a > 0$. On note G le point défini par l'égalité vectorielle
$$\overrightarrow{AG} = \tfrac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \tfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}.$$

    Faire une figure en prenant $[AB]$ « horizontale », A à gauche de B, C « au-dessus » de $[AB]$. Placer alors le point G sur la figure.

    Calculer AG en fonction de a sans introduire de nouveaux points.

12. ABB' et ACC' sont deux triangles rectangles isocèles en A. On a $AB = AB' = 1$ et $AC = AC' = 3$. M est le milieu de $[B'C]$. On se place dans le repère orthonormé
$$\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}\right).$$



    (a) i. Déterminez les coordonnées des points de la figure, puis des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC'}$.

    ii. Déduisez-en que (AM) et (BC') sont perpendiculaires.

    (b) La perpendicularité des droites (AM) et (BC') reste-t-elle vraie, quelle que soit la longueur commune à AC et AC' ?

Formules d'addition des fonctions trigonométriques

Pour tous réels α et β, on a :

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha.$$

Démonstration : Dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère deux vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $(\vec{i},\vec{u})=\beta$ et $(\vec{i},\vec{v})=\alpha$. Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont respectivement $\vec{u}=(\cos\beta,\sin\beta)$ et $\vec{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$.

En utilisant l'expression du produit scalaire dans un repère orthonormé :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

D'autre part, par définition du produit scalaire :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u},\vec{v})=\cos(\vec{u},\vec{v}).$$

L'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $(\vec{u},\vec{v})$, peut être déterminé à partir des angles formés par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec $\vec{i}$:

$$(\vec{u},\vec{v})=(\vec{i},\vec{v})-(\vec{i},\vec{u}).$$

En d'autres termes, l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ correspond à $\alpha-\beta$, car $(\vec{i},\vec{v})=\alpha$ et $(\vec{i},\vec{u})=\beta$.

On en déduit le premier résultat :

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Pour la seconde formule, on utilise la relation $\sin(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$:

$$\sin(\alpha-\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right).$$

En développant :

$$\sin(\alpha-\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\beta)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(\beta).$$

Enfin, comme $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, on obtient :

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\beta)\cos(\alpha).$$