Les racines n−ième d'un nombre complexe $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

z possède n racines n−ième distinctes :

$$r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right)$$

pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Ici, $r^{1/n}$ est la racine $n^{\text{ème}}$ réelle positive de r.

Exercices

1 Rechercher les racines 4ème de -4.

Remarque : cela correspond à solutionner dans $\mathbb{C}$ l'équation $w^4 = -4$

2 Déterminer les racines cubiques des nombres complexes suivants : (réponses sous forme trigonométrique)

(a) $1+i$ (b) i (c) 3 (d) -3 (e) $2\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (f) $\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (g) $-2\left(1+\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (h) $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$

3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^5 - z = 0$ **b)** $z^4 - 1 + i = 0$ **c)** $z^6 - (3+2i)\,z^3 + 2 + 2i = 0$.

4 Soit le nombre complexe $z = -\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

(a) Calculer l'argument de z^2 ainsi que son module
(b) En déduire ***la*** forme trigonométrique de z
(c) Déterminer les racines cubiques de z sous forme trigonométrique

5 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 + z^3 + 1 = 0$. Les solutions seront données sous forme trigonométrique.