Les racines $n-$ième d'un nombre complexe $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

z possède n racines $n-$ième distinctes :

$$r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right)$$

pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Ici, $r^{1/n}$ est la racine $n^{\text{ème}}$ réelle positive de r.

Exercices

1 Rechercher les racines 4ème de -4.

Remarque : cela correspond à solutionner dans $\mathbb{C}$ l'équation $w^4 = -4$

Solution: soit $z = -4 = 4 \cdot \text{cis}(\pi)$. On a $w_k = \sqrt[4]{4} \cdot \text{cis}\left(\dfrac{\pi + 2k\pi}{4}\right)$ avec $k = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{cases} w_0 = \sqrt{2}\cdot\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) & = 1+\mathbf{i} \\ w_1 = \sqrt{2}\cdot\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right) & = -1+\mathbf{i} \\ w_2 = \sqrt{2}\cdot\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right) & = -1-\mathbf{i} \\ w_3 = \sqrt{2}\cdot\text{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right) & = 1-\mathbf{i} \end{cases}$$

2 Déterminer les racines cubiques des nombres complexes suivants : (réponses sous forme trigonométrique)

(a) $1+i$ (c) 3 (e) $2\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (g) $-2\left(1+\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

(b) i (d) -3 (f) $\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (h) $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$

Solution:

(a) $\sqrt[6]{2}\text{cis}\left(\frac{-7\pi}{12}\right)$, $\sqrt[6]{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sqrt[6]{2}\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

(b) $\text{cis}\left(\frac{-\pi}{2}\right)$, $\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

(c) $\sqrt[3]{3}\text{cis}\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{3}\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

(d) $\sqrt[3]{3}\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $-\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{3}\text{cis}\left(\frac{-\pi}{3}\right)$

(e) $\sqrt[3]{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{9}\right)$, $\sqrt[3]{2}\text{cis}\left(\frac{7\pi}{9}\right)$, $\sqrt[3]{2}\text{cis}\left(\frac{13\pi}{9}\right)$

(f) les racines de cubiques de $\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ sont :

$$\text{cis}\left(\tfrac{5\pi}{18}\right)\ ;\ \text{cis}\left(\tfrac{17\pi}{18}\right)\ ;\ \text{cis}\left(\tfrac{29\pi}{18}\right)$$

(g) les racines de cubiques de $2\sqrt{3}\text{cis}\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$ sont :

$$\sqrt[3]{2\sqrt{3}}\text{cis}\left(\tfrac{-5\pi}{18}\right)\ ;\ \sqrt[3]{2\sqrt{3}}\text{cis}\left(\tfrac{7\pi}{18}\right)\ ;\ \sqrt[3]{2\sqrt{3}}\text{cis}\left(\tfrac{19\pi}{18}\right)$$

(h) les racines de cubiques de $\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ sont :

$$\text{cis}\left(\tfrac{\pi}{18}\right)\ ;\ \text{cis}\left(\tfrac{13\pi}{18}\right)\ ;\ \text{cis}\left(\tfrac{25\pi}{18}\right)$$

3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^5 - z = 0$ **b)** $z^4 - 1 + i = 0$ **c)** $z^6 - (3+2i)\,z^3 + 2 + 2i = 0.$

Solution:

a) $S_{\mathbb{C}} = \left\{\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right); \text{cis}\left(\frac{-\pi}{2}\right) ; -1 ; 0 ; 1\right\}$

b) $z^4 = 1 - i \iff z^4 = \sqrt{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{-\pi}{4}\right)$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{\sqrt[8]{2}\text{cis}\left(\frac{-\pi}{16}\right) ; \sqrt[8]{2}\text{cis}\left(\frac{7\pi}{16}\right) ; \sqrt[8]{2}\text{cis}\left(\frac{15\pi}{16}\right) ; \sqrt[8]{2}\text{cis}\left(\frac{23\pi}{16}\right)\right\}$$

c) $z^3 = \begin{cases} 2 + 2\mathbf{i} = \left(\sqrt{2}\right)^3 \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 1 = 1\,\text{cis}\,(0) \end{cases}$

racines cubiques de $\left(\sqrt{2}\right)^3 \text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$:

$$\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right) ; \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{9\pi}{12}\right) ; \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{17\pi}{12}\right)$$

racines cubiques de $1\,\text{cis}\,(0)$:

$$\text{cis}\,(0) = 1 ; \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} ; \text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{12}\right) ; \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{9\pi}{12}\right) ; \sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{17\pi}{12}\right) ; \text{cis}\,(0) = 1 ; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} ; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\right\}$$

4 Soit le nombre complexe $z = -\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

(a) Calculer l'argument de z^2 ainsi que son module

(b) En déduire ***la*** forme trigonométrique de z

(c) Déterminer les racines cubiques de z sous forme trigonométrique

Solution:

(a) $z^2 = 2\sqrt{3} - 2\mathbf{i} \implies |z^2| = 4$ et $\arg(z^2) = -\pi/6$

(b) $z = 2 \cdot \text{cis}\,(-\pi/12 + \pi) = 2 \cdot \text{cis}\,(11\pi/12)$

(c) $w_0 = \sqrt[3]{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{11\pi}{36}\right)$; $w_1 = \sqrt[3]{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{11\pi}{36} + \frac{2\pi}{3}\right)$; $w_3 = \sqrt[3]{2} \cdot \text{cis}\left(\frac{11\pi}{36} + \frac{4\pi}{3}\right)$

5 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 + z^3 + 1 = 0$. Les solutions seront données sous forme trigonométrique.

Solution: On pose $T = z^3$ et on résout $T^2 + T + 1 = 0 \quad (\rho = -3 = 3\mathbf{i}^2)$

$$T_1 = -\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\ T_2 = -\frac{1}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Il suffit de rechercher les racines cubiques de T_1 et T_2 avec

$$T_1 = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ et } T_2 = \text{cis}\left(-\frac{2\pi}{3}\right).$$

D'où les solutions de $z^6 - z^3 + 1 = 0$ sont :

$$z_{11} = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{9}\right),\ z_{12} = \text{cis}\left(\frac{8\pi}{9}\right),\ z_{13} = \text{cis}\left(\frac{14\pi}{9}\right)$$

$$z_{21} = \text{cis}\left(-\frac{2\pi}{9}\right),\ z_{22} = \text{cis}\left(\frac{4\pi}{9}\right),\ z_{23} = \text{cis}\left(\frac{10\pi}{9}\right)$$