

1° Démontrer que :

$$(a) \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\cot\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

**SOLUTION :** on sait que :  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

donc,

$$\frac{2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}{-2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}$$

on simplifie les facteurs  $\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$  (en fixant  $\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \neq 0$ ) :

$$\frac{\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{-\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}$$

on arrive bien à :

$$-\cot\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

réponse finale :

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\cot\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

Rappel :  $\cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$ .

$$(b) \sin 7\alpha - \sin 5\alpha - 2 \cos 5\alpha \sin 2\alpha = -2 \cos 4\alpha \sin \alpha$$

**SOLUTION :** on vérifie aisément que :

$$\sin 7\alpha - \sin 5\alpha = 2 \cos(6\alpha) \sin(\alpha)$$

$$2 \cos 5\alpha \sin 2\alpha = \sin 7\alpha - \sin 3\alpha \text{ et}$$

$$2 \cos 4\alpha \sin \alpha = \sin 5\alpha - \sin 3\alpha$$

par conséquent,

$$\sin 7\alpha - \sin 5\alpha - 2 \cos 5\alpha \sin 2\alpha = -2 \cos 4\alpha \sin \alpha \quad (1)$$

$$\iff \sin 7\alpha - \sin 5\alpha = 2 \cos 5\alpha \sin 2\alpha - 2 \cos 4\alpha \sin \alpha \quad (2)$$

$$\iff 2 \cos(6\alpha) \sin(\alpha) = \sin 7\alpha - \sin 3\alpha - (\sin 5\alpha - \sin 3\alpha) \quad (3)$$

$$\iff 2 \cos(6\alpha) \sin(\alpha) = \sin 7\alpha - \sin 5\alpha \quad (4)$$

$$(c) \frac{2 \sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)} = \tan \alpha + \tan \beta$$

**SOLUTION :**

2° Simplifier au maximum l'expression suivante :

$$\sin \alpha \sin(\beta - \gamma) + \sin \beta \sin(\gamma - \alpha) + \sin \gamma \sin(\alpha - \beta)$$

**SOLUTION :**

3° Exprimer l'expression suivante en fonction de  $\cot \frac{x}{2}$  :

$$S = 1 + \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x + \dots$$

**SOLUTION :** Il s'agit ici d'une progression géométrique de raison  $\cos x$ .

Rappel : La somme des éléments d'une suite géométrique de raison  $a$  avec  $|a| < 1$  est donné par la formule suivante :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a^i = \frac{1}{1-a}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} \cos^i x &= \frac{1}{1 - \cos x} = \frac{1}{1 - 1 + 2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1 + \cot^2 \frac{x}{2}}{2} \end{aligned}$$

Si  $\cos x \neq 1$

4° Si  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont les angles d'un triangle, démontrer que :

(a)  $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$

**SOLUTION :**

(b)  $\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \tan \frac{\alpha}{2} = 1$

**SOLUTION :**

(c)  $\cot \frac{\beta}{2} = \frac{\cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\gamma}{2}}{2}$  sachant que  $\sin \beta = \frac{\sin \alpha + \sin \gamma}{2}$

**SOLUTION :**

(d)  $\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{n-1}{n+1}$  sachant que  $\sin \left( \alpha + \frac{\beta}{2} \right) = n \sin \frac{\beta}{2}$

**SOLUTION :**

5° L'angle d'élévation d'une tour observée par rapport à un point est de  $60^\circ$ . Lorsque l'on s'approche de la tour d'une distance de 10 m, on l'observe sous un angle de  $70, 53^\circ$ . Sachant que  $\sin 70, 53^\circ = 2\sqrt{2}/3$ , calculer sans calculatrice la hauteur de la tour.

**SOLUTION :**

6° Un pylône vertical, dont le pied est inaccessible, se dresse sur un sol horizontal. Trois points  $A, B, C$  de ce sol horizontal sont distants respectivement de 40 m, 50 m et 60 m du pied du pylône. Les angles sous lesquels on voit de ces trois points le sommet du pylône valent respectivement  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ . Si  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ , quelle est la hauteur du pylône?

**SOLUTION :**

7° Un pylône vertical, dont le pied est inaccessible, se dresse sur un sol horizontal. Deux points  $A$  et  $B$ , situés sur le sol, sont alignées avec le pied du pylône. Si la distance de  $A$  à  $B$  vaut  $d$  et si les angles sous lesquels on voit de ces deux points le sommet du pylône valent respectivement  $\alpha$  et  $\beta$ , calculer la hauteur  $h$  du pylône en fonction de  $d, \alpha$  et  $\beta$ .

**SOLUTION :**

8° Démontrer la relation suivante :

$$\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ = 4$$

**SOLUTION :**

9° Démontrer la relation suivante :

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$$

**SOLUTION :**