NOM ______________________ PRENOM ______________________ classe …

Certaines questions proposent plusieurs choix de réponse, et il peut y avoir une ou plusieurs bonnes réponses par question. Chaque réponse correcte que vous sélectionnez vous rapportera un point, mais attention, si vous cochez une réponse incorrecte, vous perdrez un demi-point. Par conséquent, si vous n'êtes pas certain de la réponse, il est préférable de ne rien cocher pour éviter de perdre des points.

En outre, ne pas cocher de réponse correcte n'entraînera pas de perte de points, mais cela ne vous rapportera pas non plus de points. Assurez-vous donc de lire attentivement chaque question et de prendre le temps de réfléchir avant de faire votre choix.

En ce qui concerne les questions ouvertes, il est important de fournir une réponse complète, car une simple réponse ne sera pas suffisante.

1 Soit $z = (1-2\mathbf{i})^2$. Quelles réponses sont exactes ?

- ☐ $z = 5 - 4\mathbf{i}$
- ■ $z = -3 - 4i$
- ☐ le conjugué de z est $\overline{z} = 3 + 4\mathbf{i}$
- ■ **le module de z est 5**

2 Soit $z = \dfrac{\mathbf{i}+1}{1-\mathbf{i}\sqrt{3}}$. Quelles réponses sont exactes ?

- ■ $|z| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- ■ $z \cdot \overline{z} = \dfrac{1}{2}$
- ■ **un argument de z est $\dfrac{7\pi}{12}$**
- ☐ le conjugué de z est $\overline{z} = \dfrac{\mathbf{i}-1}{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}$

3 Soit z un nombre complexe de module 2 et d'argument $\dfrac{\pi}{4}$.

L'écriture algébrique de z est :

- ☐ $z = \sqrt{2} - \mathbf{i}\sqrt{2}$
- ■ $z = \sqrt{2} + \mathbf{i}\sqrt{2}$
- ☐ $z = 2 + 2\mathbf{i}$
- ☐ $z = 2 - 2\mathbf{i}$

4 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $\text{cis}(\theta) \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

- ☐ $\theta = 0$
- ☐ $\theta = 2\pi$
- ☐ $\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- ■ $\theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

5 Soit $z = \dfrac{(1-\mathbf{i})^{10}}{\left(1+\mathbf{i}\sqrt{3}\right)^4}$. Quelles réponses sont exactes ?

- ■ $|z| = 2$
- ☐ $|z| = \frac{1}{2}$
- ■ **un argument de z est $\dfrac{\pi}{6}$**
- ☐ un argument de z est $-\dfrac{\pi}{6}$

6 Soit $z = \dfrac{\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta}{\cos\phi - \mathbf{i}\sin\phi}, \theta, \phi \in \mathbb{R}$. Quelles réponses sont exactes ?

- ☐ $|z| = 2$
- ☐ $z = \cos(\theta - \phi) + \mathbf{i}\sin(\theta - \phi)$
- ■ $z = \cos(\theta + \phi) + \mathbf{i}\sin(\theta + \phi)$
- ■ $|z| = 1$

7 Soit z un nombre complexe non nul d'argument φ. Un argument de $\dfrac{-1 + \mathbf{i}\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :

☐ $-\dfrac{\pi}{3} + \varphi$ ☐ $-\dfrac{\pi}{3} - \varphi$ ■ $\dfrac{2\pi}{3} + \varphi$ ☐ $\dfrac{2\pi}{3} - \varphi$

8 On considère l'équation : $(E) \equiv z^2 - 2\mathbf{i}z - 1 - \mathbf{i} = 0,\ z \in \mathbb{C}$. Quelles réponses sont exactes ?

- ☐ Le réalisant de l'équation est : $\rho = 8 + 4\mathbf{i}$.
- ☐ Le réalisant de l'équation est : $\rho = 4\mathbf{i}$.
- ☐ les solutions de (E) sont : $z_1 = \dfrac{\sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})\mathbf{i}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})\mathbf{i}}{2}$.
- ☐ les solutions de (E) sont : $z_1 = \dfrac{\sqrt{2} + (2 + \sqrt{2})\mathbf{i}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})\mathbf{i}}{2}$.

9 On considère l'équation : $(E) \equiv z^2 = \dfrac{1 + \mathbf{i}}{\sqrt{2}}$, $(z \in \mathbb{C})$. Quelles réponses sont exactes ?

- ☐ Si z est une solution de (E), $\arg z = \dfrac{\pi}{8} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- ☐ $z = \operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $z = -\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ sont solutions de (E)
- ☐ $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
- ☐ $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

10 Résoudre l'équation complexe $z^2 - (7 + 2\mathbf{i})\,z + 18 + 16\mathbf{i} = 0$

Solution: $\rho = (7 + 2\mathbf{i})^2 - 4\,(18 + 16\mathbf{i}) = -27 - 36\mathbf{i} = -9\,(3 + 4\mathbf{i}) = 9\mathbf{i}^2 \cdot (3 + 4\mathbf{i})$

$\mathrm{RCC}(3 + 4\mathbf{i}) = \pm\left(\sqrt{\frac{5+3}{2}} + \mathbf{i}\sqrt{\frac{5-3}{2}}\right) = \pm\,(2 + \mathbf{i})$

donc, $\mathrm{RCC}(\rho) = \pm\,(3\mathbf{i}\,(2 + \mathbf{i})) = \pm\,(-3 + 6\mathbf{i})$

$$z = \frac{7 + 2\mathbf{i} \pm (-3 + 6\mathbf{i})}{2}$$

$$S = \{2 + 4\mathbf{i}\ ;\ 5 - 2\mathbf{i}\}$$

11 Soit $z = (4 - m) + (5m - 1)\,\mathbf{i}$ un nombre complexe où m est un réel inconnu.

(a) Déterminez les valeurs réelles que l'on doit donner à m pour que le module de z soit de 5 unités.

Solution: module : $\sqrt{(4 - m)^2 + (5m - 1)^2} = 5 \iff 26m^2 - 18m - 8 = 0$

$$m_1 = 1\ ,\ m_2 = -\frac{4}{13}$$

(b) Expliquez pourquoi l'argument de z ne sera jamais compris entre π et $\frac{3\pi}{2}$ quelle que soient les valeurs données à m.

Solution: Le point image de z doit se situer dans le 3ème quadrant.
Cela implique $4-m<0$ et $5m-1<0$.
C'est impossible car m ne peut être supérieur à 4 et inférieur à $\frac{1}{5}$ en même temps.

12 On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^4 + 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 + 2\sqrt{3}z + 7$$

(a) i. Calculer $P(\mathbf{i})$ et $P(-\mathbf{i})$.

Solution: $P(\mathbf{i}) = 0$ et $P(-\mathbf{i}) = 0$

ii. Montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré, que l'on déterminera, tel que : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \left(z^2+1\right)\cdot Q(z)$

Solution: Méthode de Hörner :

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & 1 & 2\sqrt{3} & 8 & 2\sqrt{3} & 7 \\ \mathbf{i} & \downarrow & \mathbf{i} & -1+2\sqrt{3}\mathbf{i} & 7\mathbf{i}-2\sqrt{3} & -7 \\ \hline & 1 & 2\sqrt{3}+\mathbf{i} & 7+2\sqrt{3}\mathbf{i} & 7\mathbf{i} & 0 \end{array}$$

$P(z) = (z-\mathbf{i})\left(z^3 + \left(2\sqrt{3}+\mathbf{i}\right)z^2 + \left(7+2\sqrt{3}\mathbf{i}\right)z + 7\mathbf{i}\right)$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2\sqrt{3}+\mathbf{i} & 7+2\sqrt{3}\mathbf{i} & 7\mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & \downarrow & -\mathbf{i} & -2\sqrt{3}\mathbf{i} & -7\mathbf{i} \\ \hline & 1 & 2\sqrt{3} & 7 & 0 \end{array}$$

$P(z) = (z-\mathbf{i})(z+\mathbf{i})\left(z^2+2\sqrt{3}z+7\right)$ et donc, $Q(z) = z^2+2\sqrt{3}z+7$

(b) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.

Solution: $z^2+2\sqrt{3}z+7=0 \iff z = -\sqrt{3}+2\mathbf{i} \quad \vee \quad z = -\sqrt{3}-2\mathbf{i}$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{\pm\mathbf{i}\,;\ -\sqrt{3}\pm 2\mathbf{i}\right\}$$