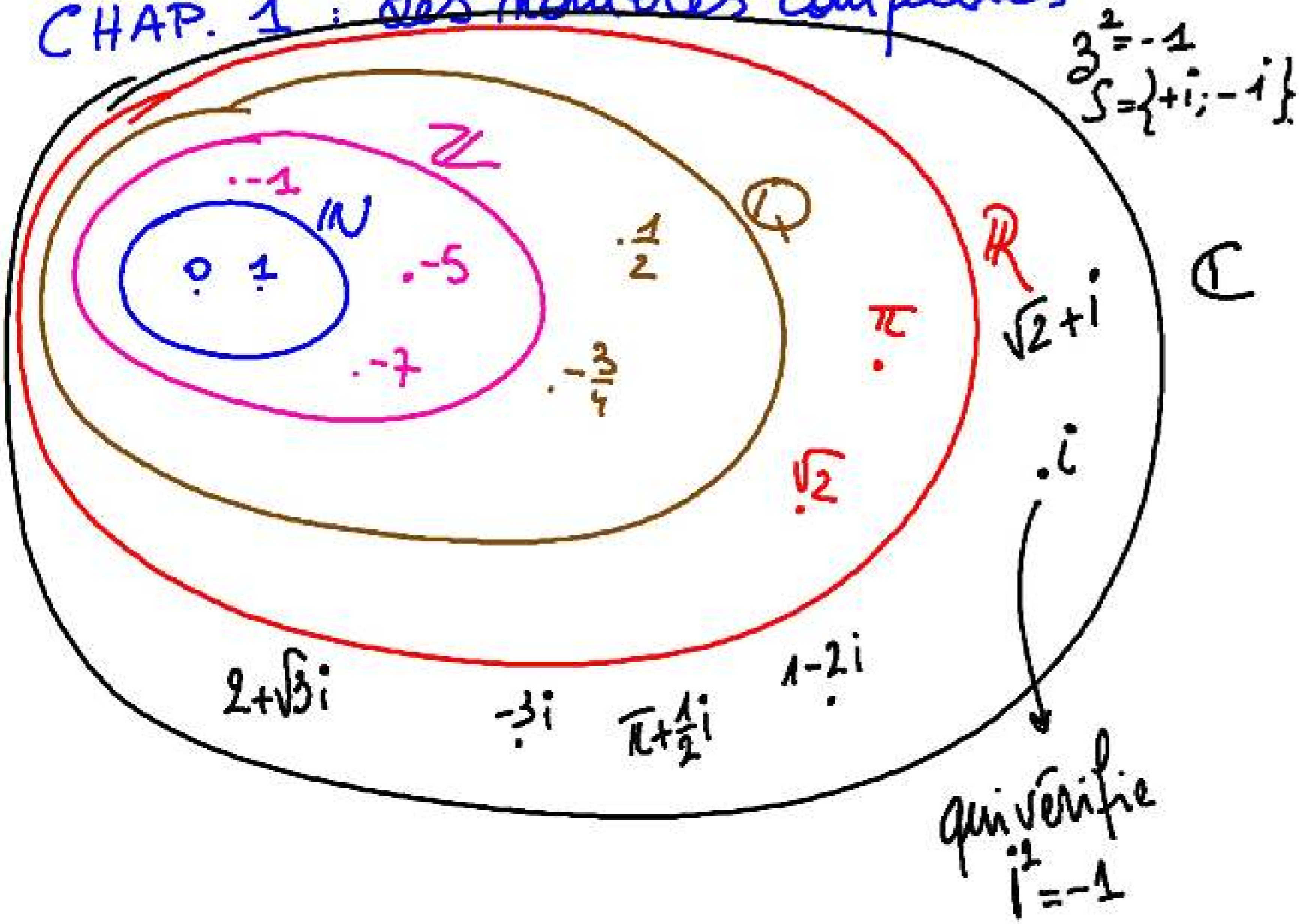
CHAP. 1 : Les nombres complexes



OPERATIONS DANS $\mathbb{C}$

$\oplus$: $\mathbb{C} \ni z = a+bi$

SOMME

$\mathbb{C} \ni z' = a'+b'i$

$z+z' = (a+a')+(b+b')i$

NOTATION :

$$\begin{cases} Re(z) = a \\ Im(z) = b \end{cases}$$

$\Downarrow$

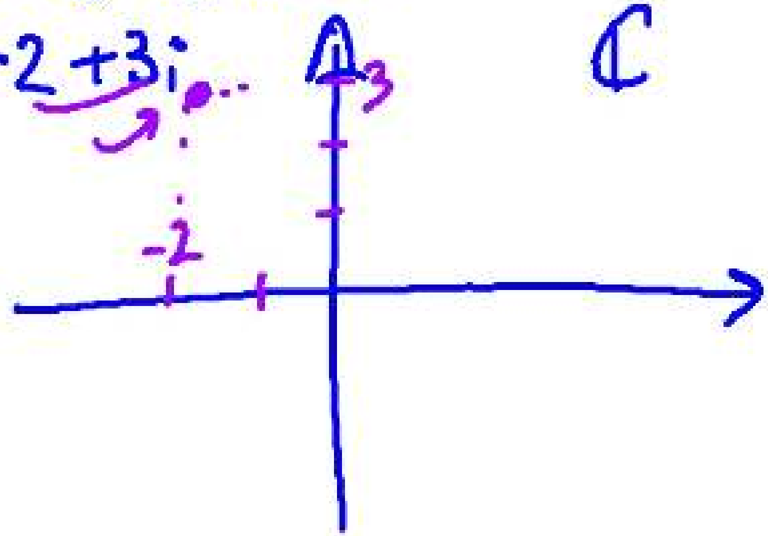
$Re(z+z') = Re(z)+Re(z')$

$Im(z+z') = Im(z)+Im(z')$

ex : $(1+2i)+(-3+1i)$

$= (1-3)+(2+1)i$

$= -2+3i$



$\ominus$ $\quad 1-2i-(3+i)$

$$= 1-2i-3-i$$

$$= -2-3i$$

PRODUIT : $\quad z = a+bi$ et $z' = a'+b'i$

↳ $z\cdot z' = (a+bi)(a'+b'i)$

$$= a.a' + a.b'i + b.a'i + b.b'i^2 \qquad (i^2=-1)$$

$$= a.a' + a.b'i + b.a'i - b.b'$$

PARTIE REELLE

PARTIE IMAGINAIRE

$$z\cdot z' = (a.a'-b.b') + (a.b'+a'b).i$$

$$Re(z\cdot z') \neq Re(z)\cdot Re(z')$$

$$Im(z\cdot z') \neq Im(z)\cdot Im(z')$$

ex. $(1-2i)\cdot(3+i)$

$= 3+i-6i-\underbrace{2i^2}_{+2}$

$= 5-5i$

DONNER LA F.A.

$a+bi$

ex. $(1+2i)^3 = (1+2i)(1+2i)^2$

$= (1+2i)(1+4i+\underbrace{4i^2}_{-4})$

$= (1+2i)(-3+4i)$

$= -3+4i-6i-8$

$= -11-2i$

INVERSION

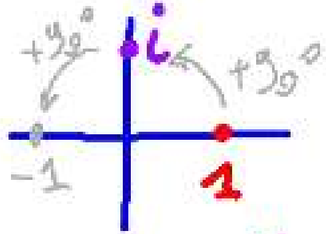
mettre sous forme algébrique $\frac{1}{a+bi}$

$i^2 = -1$

$\times(i)$ $90°$

ex : $\frac{1}{1-2i} = \dots = x+yi$

$(1-2i)^{-1} = \dots + \dots i$



$\times(-1)$ $180°$

l'inverse de $1-2i$

1ère méthode : Re(1) = 1 ; Im(1) = 0

$\frac{1}{1-2i} = x+yi \iff 1 = (1-2i)(x+yi)$

$\iff 1+0i = (x+2y) + (-2x+y)\,i$

$(1-2i)(x+yi)$
$= x+yi-2xi-2yi^2$
$= \underbrace{x+(y-2x)i+2y}$

$\nexists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = -1$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$1 \quad 1 \quad \frac{1}{1} \quad 1{,}00\dots \quad 1+0i$

VIDE $\equiv \emptyset \equiv \{\}$

$x^2+1=0$, $S=\emptyset$

$z^2+1=0$, $S=\{\pm i\}$

$$1+0i = (x+2y)+(-2x+y)i$$

IDENTIFICATION

$z = z'$

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ -2x+y=0 \end{cases}$$

SYST. LIN.

$$\begin{cases} x+4x=1 \\ y=2x \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} x=\frac{1}{5} \\ y=\frac{2}{5}. \end{array}$$

en clair : $\dfrac{1}{1-2i} = \dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$

$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-2i}\right)=\frac{1}{5}$ et $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-2i}\right)=\frac{2}{5}$

2ème méthode :

le CONJUGUÉ d'un nombre complexe

$z = a+bi \Rightarrow \bar{z} = a-bi$

ex $\overline{1+2i} = 1-2i$ $\quad \bar{i} = -i$

$\overline{3-5i} = 3+5i$ $\quad \bar{7} = 7$

$\overline{7+0i} = 7-0i = 7$

APPLIC

$$\frac{1}{1-2i} = \frac{1}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i}$$

(x CONJ. du DEN.)

$$= \frac{1.(1+2i)}{1\cancel{-2i}\cancel{+2i}\underbrace{-4i^2}_{+4}} = \frac{1+2i}{5} \text{ ou } \frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$$

1 Puissances de $\mathbf{i}$ – Exprimez chacun des nombres suivant comme un élément de l'ensemble $\{-1, +1, -\mathbf{i}, +\mathbf{i}\}$:

$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ et $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

(a) $\mathbf{i}^3$

(b) $\mathbf{i}^6 = i^2 \cdot i^4$
$= (-1)(-1)^2$
$= -1$

(c) $\mathbf{i}^{16}$

(d) $\mathbf{i}^4$

(e) $\mathbf{i}^9$

(f) $\mathbf{i}^{32} = (i^2)^{16}$
$= (-1)^{16} = 1$

2 Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

(a) $\dfrac{1+\mathbf{i}\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\mathbf{i}}$

(b) $\left(\dfrac{1-\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}\right)^2$ ou $\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)^2} = \dfrac{\cdots}{\cdots}$

$= \left(\dfrac{1-i}{1+i} \cdot \dfrac{1-i}{1-i}\right)^2$

$= \dfrac{(1-i)^4}{4} = \dfrac{(-2i)^2}{4} = -1$

$(1+i)(1-i) = 1^2 - i^2$
$= 1-(-1)$
$= 2$

(c) $\mathbf{i} + \dfrac{1}{\mathbf{i}}$