1 Pour chaque suite définie ci-dessous, calculer les premiers termes à la main, conjecturer le sens de variations puis démontrer la conjecture en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

(a) (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{n}{3^n}$.

....

....

....

(b) (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = n + \dfrac{1}{n}$.

....

....

....

2 Etudier les variations des suites :

(a) $u_n = 5 - \dfrac{n}{3}$

....

....

....

(b) $u_n = 2n^2 - 7n - 2$

....

....

....

(c) $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$

....

....

....

3 On admet que les suites ci-dessous ont tous leurs termes strictement positifs. En comparant le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1, étudier le sens de variations des suites.

(a) Pour tout entier n avec $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{3^n}{5n}$.

....

....

....

(b) Pour tout entier n avec $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{8u_n}{n}$ et $u_1 = 1$.

....

....

....

4 Démontrer en utilisant deux méthodes différentes que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 10n$ est monotone à partir d'un certain rang (que l'on précisera).

....

....

5 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 3$ et $u_0 = 1$.

(a) Calculer à la main u_1, u_2, u_3 et u_4.

....

....

(b) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

....

....

(c) Montrer que pour tout réel x, $x^2 - 3x + 3 > 0$.

....

....

(d) Démontrer votre conjecture.

....

....

6 On considère la suite définie pour tout entier naturel n, par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

(a) A l'aide du graphique, représenter u_0, u_1, u_2 et u_3.

....

....

(b) Quelle conjecture peut-on faire concernant le sens de variation de la suite (u_n).

....

....

(c) Dans la suite de l'exercice, on admet que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 2$.

(a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-{u_n}^2 + u_n + 2}{\sqrt{2 + u_n} + u_n}$.

....

....

(b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

....

....