Primitives et forme générale

Première approche

Intégrale indéfinie

6 février 2025

Mise en Contexte

Position d'un Véhicule en Mouvement

Introduction

Nous explorons la relation entre la vitesse d'un véhicule et sa position sur une route

1. en partant d'une position initiale connue
2. en utilisant le concept d'intégrale indéfinie

Contexte

Un véhicule se déplace sur une route.

1. au temps $t = 0$ (h), son espace parcouru est de $e(0) = 1,5$ (km)
2. sa vitesse est donnée par $v(t) = 2t$ (km/h)

Notre objectif est de déterminer sa position $e(t)$ (son espace parcouru) à tout instant t.

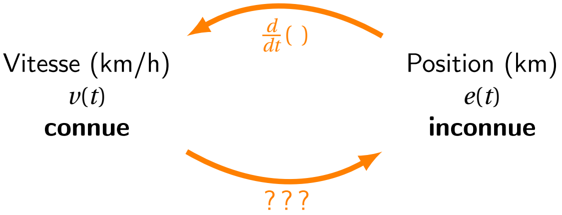
Mise en Contexte

Rappel

Relation Vitesse-Position

La vitesse $v(t)$,

- taux de variation instantané de la position par rapport au temps
- obtenu en dérivant la fonction position $e(t)$.
- $v(t) = \frac{d}{dt}\big(e(t)\big) = e'(t)$



Mise en Contexte

Problème Inverse

Connaissant $v(t) = 2t$, nous cherchons $e(t)$ telle que $e'(t) = 2t$.

$\frac{d}{dt}(\ )$

Vitesse (km/h)
$v(t) = e'(t) = 2t$
connue

Position (km)
$e(t)$
inconnue

? ? ?

Cela conduit à une équation différentielle où la dérivée de $e(t)$ est connue, mais pas $e(t)$ elle-même.

Question

Quelle est la fonction $e(t)$ qui, une fois dérivée, nous donne $2t$?

Question

Quelle est la fonction $e(t)$ qui, une fois dérivée, nous donne $2t$?

- solution évidente : $e(t) = t^2$ car $\left(t^2\right)' = 2t$
- autres possibilités :
  - $e(t) = t^2 + 3$ car $\left(t^2 + 3\right)' = \left(t^2\right)' + (3)' = 2t + 0 = 2t$
  - $e(t) = t^2 - 7$ car $\left(t^2 - 7\right)' = \left(t^2\right)' + (-7)' = 2t + 0 = 2t$
- en règle générale : $e(t) = t^2 +$ constante

$$e(t) = t^2 + C \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}$$

Vocabulaire

- primitives de v : $\begin{cases} e(t) = t^2 + 3 \\ e(t) = t^2 - 7 \end{cases}$
- ensembles des primitives de v : $e(t) = t^2 + \mathbf{C} \quad (\mathbf{C} \in \mathbb{R})$

Solution

- La solution générale de cette équation différentielle est $e(t) = t^2 + C$, où C est une constante réelle.
- Cette forme représente une famille infinie de fonctions, toutes étant des primitives de $v(t)$.

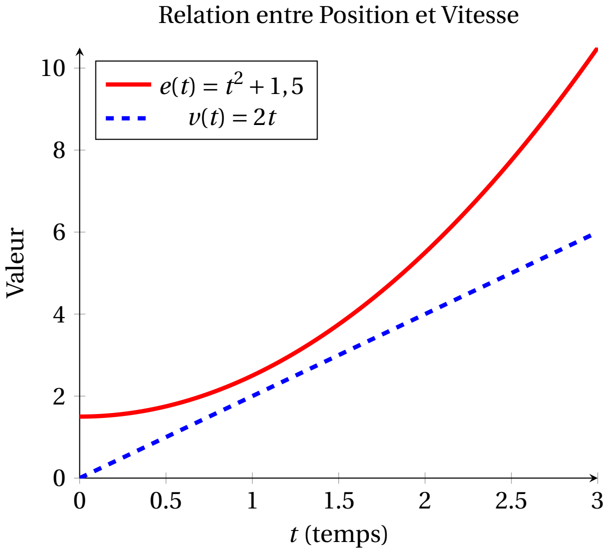
Détermination de la Constante C

- En tenant compte de la position initiale $e(0) = 1,5$ (km), nous pouvons déterminer C.
- Remplaçant $t = 0$ dans $e(t) = t^2 + C$, nous obtenons $C = 1,5$.

Conclusion

La position du véhicule en fonction du temps est donc donnée par $e(t) = t^2 + 1,5$, où $e(t)$ est exprimée en kilomètres et t en heures.

Relation entre Position et Vitesse



Définition de primitive

Primitives d’une fonction continue

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.

Définition

Une primitive de f sur I est une fonction F définie et dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ telle que $F' = f$.

Exemple 1

Démontrer que $F(x) = \frac{x^4}{4} - x + 3$ est une primitive de $f(x) = x^3 - 1$

Preuve

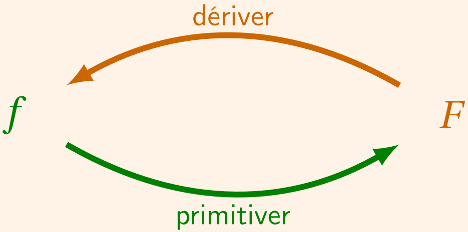
il suffit de dériver F :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\frac{x^4}{4} - x + 3\right)' \\ &= \frac{4x^3}{4} - 1 + 0 \\ &= x^3 - 1 = f(x) \end{aligned}$$

Vocabulaire

On dit que F est *une* primitive de f et non pas *la* primitive de f car une fonction admettant une primitive n'en admet pas une seule !

Synthèse



Primitives Usuelles sur un Intervalle

Fonction f	Une Primitive F	Intervalle
$x^n,\ n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$]0,+\infty[$ sauf si $n \in \mathbb{Z}$; $\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$; $]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$ si $n \in \mathbb{Z}^-$.
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$
$\dfrac{1}{x-a},\ a \neq 0$	$\ln\lvert x-a\rvert$	$]a,+\infty[$ ou $]-\infty,a[$
$\mathbf{e}^{nx},\ n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\frac{1}{n}\mathbf{e}^{nx}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\ k \in \mathbb{Z}$

Primitives Usuelles sur un Intervalle

Fonction f	Une Primitive F	Intervalle
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1,1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$]-1,1[$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2},\ a \neq 0$	$\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\mathbb{R}$

Propriétés de linéarité

- Soient a un nombre, et $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions continues sur un intervalle I dont deux primitives sont $F(x)$ et $G(x)$.
- Les fonctions $a \cdot f(x)$ et $f(x)+g(x)$ sont continues et admettent des primitives sur I.
- Deux de ces primitives sont $a \cdot F(x)$ et $F(x)+G(x)$.

Soient les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}$.

- $F(x) = \frac{x^3}{3}$ et $G(x) = \ln(x)$ sont deux primitives de f et g
- $2F(x) = 2 \times \frac{x^3}{3}$ est l'expression d'une primitive de $2f$.
- $F(x) + G(x) = \frac{x^3}{3} + \ln(x)$ est l'expression d'une primitive de $f+g$.

Ces propriétés de linéarité des primitives permettent de calculer des primitives de sommes de fonctions.

Intégrale indéfinie

Définition

L'intégrale indéfinie d'une fonction $f(x)$ est notée $\int f(x)\,dx$, et représente l'ensemble de toutes les fonctions dont la dérivée est $f(x)$.

Si F est une primitive de f, alors :

Primitive principale de $f(x)$

Constante d'intégration

Intégrateur

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Variable d'intégration

Intégrande

Les notations

$\int$ (Gottfried Wilhelm Leibniz 17e siècle)

Le symbole $\int$ devant une intégrale indéfinie représente une somme d'éléments infinitésimaux

Signe d'intégration

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Différentielle en x

Variation infinitésimale de la variable x

dx

Le symbole dx joue un rôle clé en intégration, indiquant l'intégration par rapport à la variable x, particulièrement dans le contexte de fonctions à plusieurs variables.

Exemples d'intégrales indéfinies

Voici quelques exemples simples d'intégrales indéfinies :

Exemples

- Intégrale d'une constante : $\int 5\,dx = 5x + C$ $\quad \left(\rightsquigarrow \int dx = x + C\right)$
- Intégrale d'une puissance de x : $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$ $\quad$ exemple : $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$
- Intégrale de la fonction inverse : $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
- Intégrale de l'exponentielle : $\int \mathbf{e}^x\,dx = \mathbf{e}^x + C$
- Intégrale du cosinus : $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

Formes élémentaires classiques

à retenir

- $\int \mathbf{a}^x \, \mathrm{d}x = \dfrac{\mathbf{a}^x}{\ln(\mathbf{a})} + C$
- $\int \mathbf{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathbf{e}^x + C$
- $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$
- $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \tan x + C$
- $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = -\cot x + k$
- $\int \tan x \, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$
- $\int \cot x \, \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$
- $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \cdot \arctan\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$

Linéarité de l'intégrale indéfinie

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ et λ un réel. Alors :

- $\displaystyle\int f(x) \pm g(x)(x)\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x \pm \int g(x)\ \mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int \lambda \cdot f(x)\ \mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\ \mathrm{d}x.$

- $$\begin{aligned}\int 3x^2 + 2x - 2\ \mathrm{d}x &= 3\int x^2\ \mathrm{d}x + 2\int x\ \mathrm{d}x - 2\int 1\ \mathrm{d}x \\ &= 3\ \tfrac{x^3}{3} + 2\ \tfrac{x^2}{2} - 2x + C \\ &= x^3 + x^2 - 2x + C\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\int \tfrac{3x^3+2x^2+1}{x}\ \mathrm{d}x &= \int \tfrac{3x^3}{x} + \tfrac{2x^2}{x} + \tfrac{1}{x}\ \mathrm{d}x \\ &= \int 3x^2 + 2x + \tfrac{1}{x}\ \mathrm{d}x \\ &= x^3 + x^2 + \ln|x| + C\end{aligned}$$

Utiliser les exposants fractionnaires

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^3} + \sin x \,\mathrm{d}x &= \int x^{\frac{3}{2}} + \sin x \,\mathrm{d}x \\ &= \int x^{\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}x + \int \sin x \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \cos x + C\end{aligned}$$

Simplification en utilisant les identités trigonométriques

$$\int \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x}{\cos x} \,\mathrm{d}x = \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

Dans certains cas, il faut savoir ruser ...

- $$\begin{aligned}\int \tan^2 x \, \mathrm{d}x &= \int \left(\left(1+\tan^2 x\right)-1\right) \mathrm{d}x \\ &= \int \left(1+\tan^2 x\right) \mathrm{d}x - \int 1 \, \mathrm{d}x \\ &= \tan x - x + C\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \, \mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} \\ &= \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C\end{aligned}$$

$$\int \frac{1-x^2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \ldots \text{ A toi d'essayer!}$$