Techniques d’intégration

Méthodes de primitivation

10 mars 2024

Substitution

La substitution consiste à remplacer une expression dans l'intégrale par une autre expression, de sorte que l'intégrale devienne plus facile à calculer.

$$\int f'(x)\cdot g\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int g\Big(\overbrace{f(x)}^{u}\Big)\cdot\overbrace{f'(x)\,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}u} = \int g(u)\,\mathrm{d}u$$
$$= G(u) + C$$
$$= G\big(f(x)\big) + C$$

Soit $\int x\cdot\cos\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x \quad\longrightarrow$ substitution $u = x^2 \quad\longrightarrow du = u'\,\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{d}x$

$$\tfrac{1}{2}\int\cos\left(x^2\right)\,2x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int\cos(u)\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{2}\sin(u) + C = \tfrac{1}{2}\sin\left(x^2\right) + C$$

Substitution

La substitution consiste à remplacer une expression dans l'intégrale par une autre expression, de sorte que l'intégrale devienne plus facile à calculer.

$$\int f'(x)\cdot g\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int g\Big(\overbrace{f(x)}^{u}\Big)\cdot\overbrace{f'(x)\,\mathrm{d}x}^{\mathrm{d}u} = \int g(u)\,\mathrm{d}u$$
$$= G(u) + C$$
$$= G\big(f(x)\big) + C$$

Soit $\int x\cdot\cos\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x \quad\longrightarrow$ subst. $u = x^2 \quad\longrightarrow du = u'\,\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{d}x$

$$\frac{1}{2}\int\cos\left(x^2\right)\,2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\cos(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sin(u) + C = \frac{1}{2}\sin\left(x^2\right) + C$$

Changement de variable

Le changement de variable consiste à remplacer la variable d'intégration par une nouvelle variable. La variable de remplacement est souvent choisie de manière à rendre l'intégrale plus symétrique ou plus simple.

Soit $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \quad \longrightarrow$ chgt de variable $x = \sin t \quad \longrightarrow \quad \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\,\mathrm{d}\sin t &= \int \frac{\sin t}{\cos t}\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \int \sin t\,\mathrm{d}t \\
&= -\cos t + C \\
&= -\cos(\arcsin x) + C \\
&= -\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

Changement de variable

Le changement de variable consiste à remplacer la variable d'intégration par une nouvelle variable. La variable de remplacement est souvent choisie de manière à rendre l'intégrale plus symétrique ou plus simple.

Soit $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \longrightarrow$ chgt de variable $x = \sin t \longrightarrow \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\,\mathrm{d}\sin t &= \int \frac{\sin t}{\cos t}\cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \int \sin t\,\mathrm{d}t \\
&= -\cos t + C \\
&= -\cos(\arcsin x) + C \\
&= -\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

Intégration par parties

C'est une technique d'intégration qui permet de résoudre des intégrales de la forme

$$\int u \, \mathrm{d}v,$$

où u et v sont des fonctions.

- La méthode repose sur la formule suivante, appelée formule d'intégration par parties :

$$\int u \, \mathrm{d}v = u \cdot v - \int v \, \mathrm{d}u.$$

- Cette formule peut être dérivée en utilisant la règle du produit et la formule de dérivation d'un produit.
- La formule d'intégration par parties permet de transformer l'intégrale d'un produit en une somme d'intégrales plus simples.

Intégration par parties

Étapes

1. Choisir u et $\mathrm{d}v$ dans l'intégrande. Il est souvent utile de choisir u comme une fonction qui se simplifie lorsqu'elle est dérivée, tandis que $\mathrm{d}v$ est une fonction qui peut être **facilement** intégrée.
2. Calculer $\mathrm{d}u$ et v en dérivant u et en intégrant $\mathrm{d}v$, respectivement.
3. Utiliser la formule d'intégration par parties pour transformer l'intégrale d'un produit en une somme d'intégrales plus simples.
4. Répéter les étapes 1 à 3 pour chaque nouvelle intégrale qui apparaît jusqu'à ce que toutes les intégrales soient résolues.
5. Évaluer les constantes d'intégration et simplifier la réponse si nécessaire.

Exemple d'Intégration par Parties

Prenons l'exemple de l'intégrale $\int x \cdot \ln x \, \mathrm{d}x$ pour illustrer cette méthode.

Choix de u et dv

Nous pouvons choisir $u = \ln x$ et $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$.
En **dérivant** u et en **intégrant** dv, nous obtenons :

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

En appliquant la formule d'intégration par parties, nous avons :

$$\int x \cdot \ln x \, \mathrm{d}x = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C,$$

où C est une constante d'intégration.

Cette méthode est très utile pour résoudre des intégrales qui ne peuvent pas être résolues en utilisant les techniques standard.

Exemple d'Intégration par Parties

Prenons l'exemple de l'intégrale $\int x \cdot \ln x \, \mathrm{d}x$ pour illustrer cette méthode.

Choix de u et $\mathrm{d}v$

Nous pouvons choisir $u = \ln x$ et $\mathrm{d}v = x \, \mathrm{d}x$.
En **dérivant** u et en **intégrant** $\mathrm{d}v$, nous obtenons :

intégration

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

En appliquant la formule d'intégration par parties, nous avons :

$$\int \ln x \cdot x \, \mathrm{d}x = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C,$$

où C est une constante d'intégration.

Cette méthode est très utile pour résoudre des intégrales qui ne peuvent pas être résolues en utilisant les techniques standard.

Comment choisir u et $\mathrm{d}v$?

On choisit pour fonction à dériver u en priorité les fonctions C, puis les fonctions L, puis P, puis E et enfin T. $A \to L \to P \to E \to S$

1. **A** : arcsin, arccos, arctan
2. **L** : ln, $\log_a$, ...
3. **P** : x^2, $x^3 - 3x + 2$, ...
4. **E** : $\mathbf{e}^x$, 2^x, ...
5. **S** : sin, cos.

$\mathrm{d}v$ doit être facile à intégrer

$\int x^3 \sin x \,\mathrm{d}x$	$\star \to \star \to P \to \star \to S$	$u = x^3$ et $\mathrm{d}v = \sin x \,\mathrm{d}x$
$\int x \cdot \arcsin x \,\mathrm{d}x$	$A \to \star \to P \to \star \to \star$	$u = \arcsin x$ et $\mathrm{d}v = x \,\mathrm{d}x$
$\int \ln(x) \,\mathrm{d}x$	$\star \to L \to P \to \star \to \star$	$u = \ln x$ et $\mathrm{d}v = 1 \,\mathrm{d}x$

Cette règle ne fonctionne pas systématiquement ; seule l'expérience compte !

Exemple 1 : cas simple

passage derrière le "d"

$$\int x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \int x \,\mathrm{d}\sin x$$

IPP

$$= x \cdot \sin x - \int \sin x \,\mathrm{d}x$$

à dériver (u)

$$= x \cdot \sin x - (-\cos x) + C$$

$$= x \cdot \sin x + \cos x + C$$

Exemple 2 : cas simple

$$\begin{aligned}
\int x\cdot\ln x\,\mathrm{d}x &= \int \ln x\,\mathrm{d}\tfrac{x^2}{2} \\
&= \tfrac{x^2}{2}\cdot\ln x - \int \tfrac{x^2}{2}\,\mathrm{d}\ln x \\
&= \tfrac{x^2}{2}\cdot\ln x - \int \tfrac{x^2}{2}\cdot\tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{x^2}{2}\cdot\ln x - \int \tfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{x^2}{2}\cdot\ln x - \tfrac{x^2}{4} + C
\end{aligned}$$

Exemple 3 : plus compliqué

Il faut parfois scinder une puissance de x pour intégrer plus facilement $\mathrm{d}v$

$$\int x^3 \cdot \mathbf{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x^2 \cdot x\,\mathbf{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \quad \rightarrow \begin{cases} u = x^2 \\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \end{cases} \quad \text{et} \begin{cases} \mathrm{d}v = x\,\mathbf{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{2}\mathbf{e}^{x^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&= x^2 \cdot \tfrac{1}{2}\mathbf{e}^{x^2} - \int \tfrac{1}{2}\mathbf{e}^{x^2} \cdot 2x\,\mathrm{d}x \qquad \leftarrow \text{(IPP)} \\
&= x^2 \cdot \frac{\mathbf{e}^{x^2}}{2} - \int x \cdot \mathbf{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= x^2 \cdot \frac{\mathbf{e}^{x^2}}{2} - \tfrac{1}{2}\mathbf{e}^{x^2} + C \\
&= \frac{\left(x^2 - 1\right)\mathbf{e}^{x^2}}{2} + C
\end{aligned}$$