Calcul intégral - Théorème fondamental

Seconde approche

Intégrale définie

15 mars 2024

Mise en Contexte

Position d'un Véhicule en Mouvement

Objectif : aire sous une courbe

- Calculer l'aire sous la courbe d'une fonction est un outil qui possède diverses applications pratiques.
- **Évaluer l'aire sous la courbe de vitesse en fonction du temps pour un objet, sur une période donnée, permet de déterminer la distance parcourue par cet objet pendant cet intervalle de temps.**

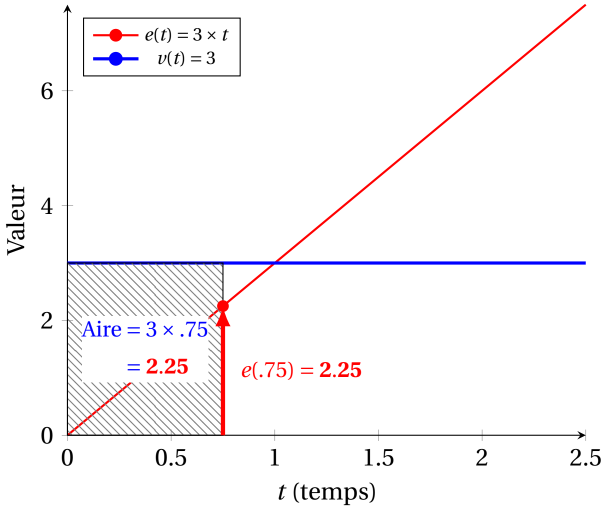
Exemple 1 : vitesse constante

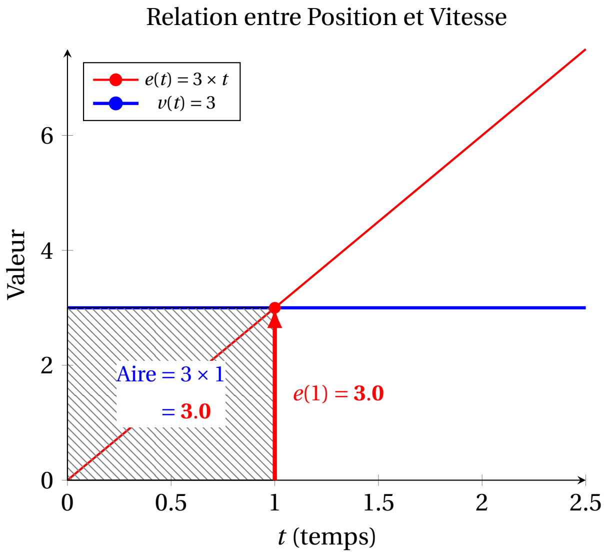
Un véhicule se déplace sur une route.

1. au temps $t = 0$ (h), son espace parcouru est de $e(0) = 0$ (km)
2. sa vitesse est constante et vaut $v = v(t) = 3$ (km/h)

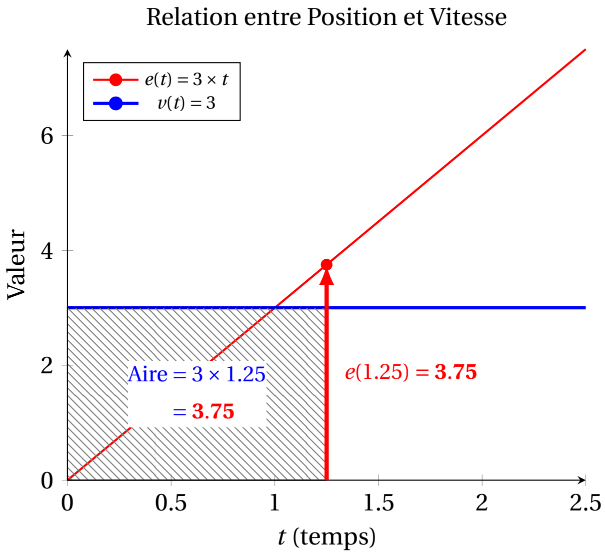
Sa position $e(t)$ (son espace parcouru) à tout instant t est facile à déterminer : $e(t) = v \times t = 3t$

Relation entre Position et Vitesse

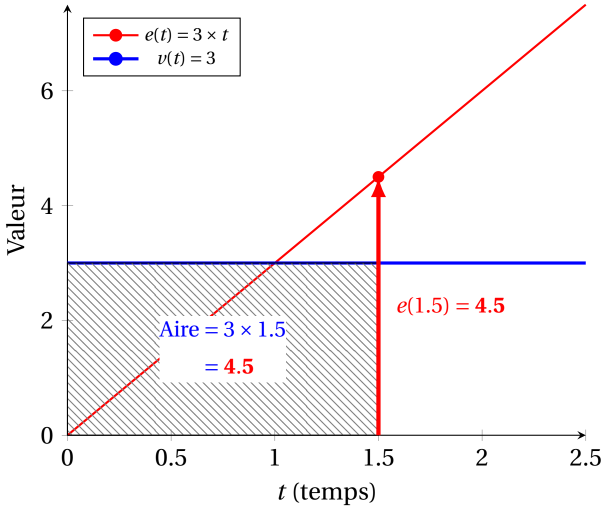




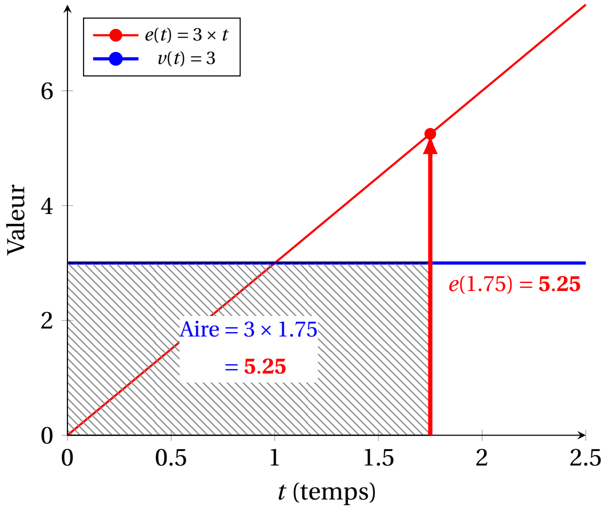
Relation entre Position et Vitesse
$e(t) = 3 \times t$
$v(t) = 3$
Valeur
6
4
2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
t (temps)
Aire $= 3 \times 1$
$= \mathbf{3.0}$
$e(1) = \mathbf{3.0}$


Relation entre Position et Vitesse
$e(t) = 3 \times t$
$v(t) = 3$
Valeur
6
4
2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
t (temps)
Aire $= 3 \times 1.25$
$= \mathbf{3.75}$
$e(1.25) = \mathbf{3.75}$

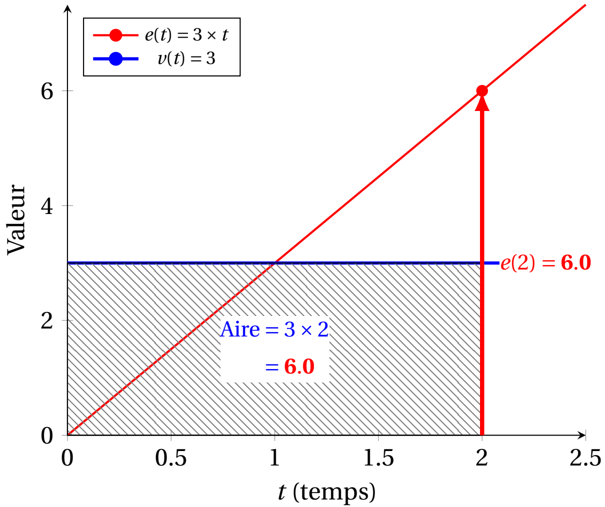
Relation entre Position et Vitesse



Relation entre Position et Vitesse



Relation entre Position et Vitesse



Exemple 2 : vitesse linéaire

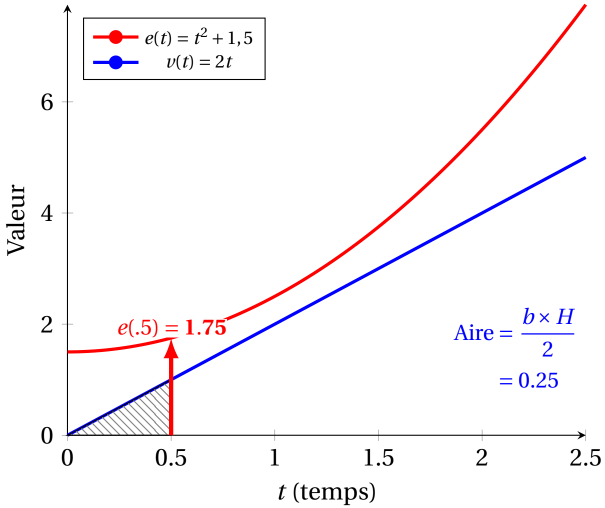
Un véhicule se déplace sur une route.

1. au temps $t = 0$ (h), son espace parcouru est de $e(0) = 1,5$ (km)
2. sa vitesse est donnée par $v(t) = 2t$ (km/h)

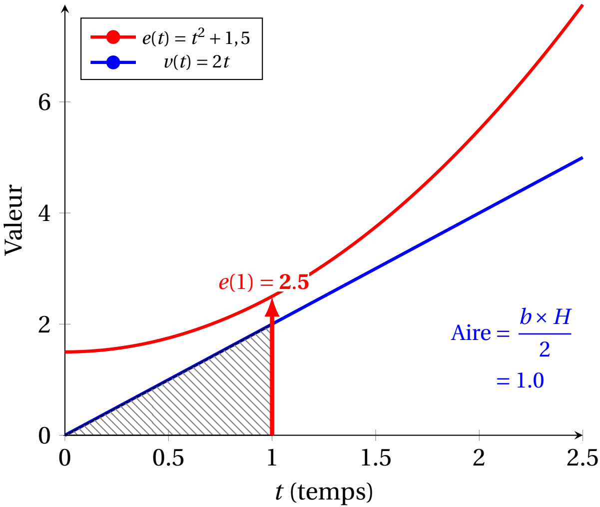
Nous avons déterminé sa position $e(t)$ (son espace parcouru) à tout instant t via l'opération inverse de la dérivation :

$$e(t) = t^2 + 1,5$$

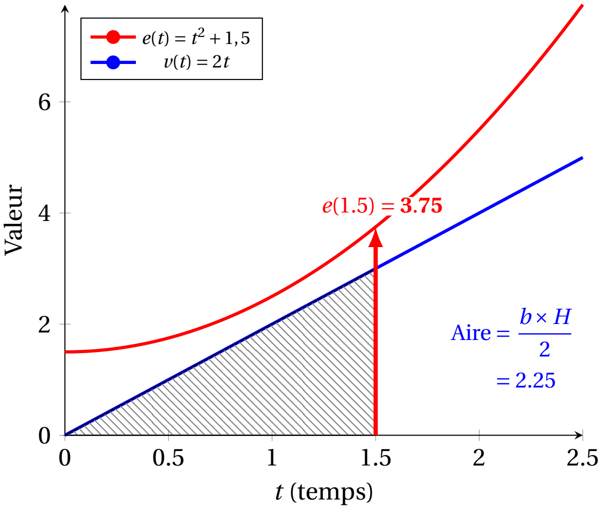
Relation entre Position et Vitesse



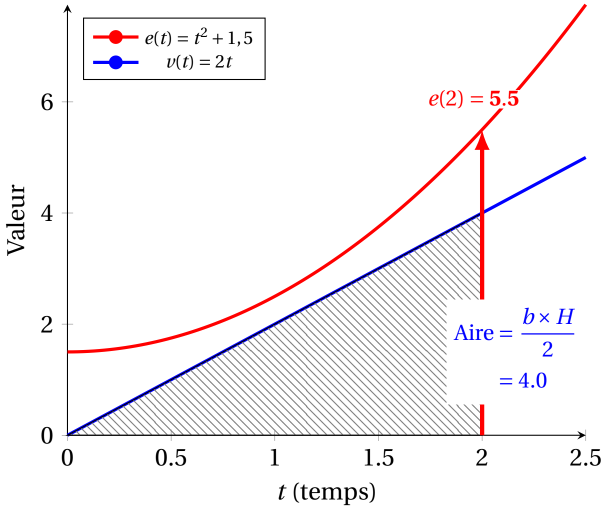
Relation entre Position et Vitesse



Relation entre Position et Vitesse

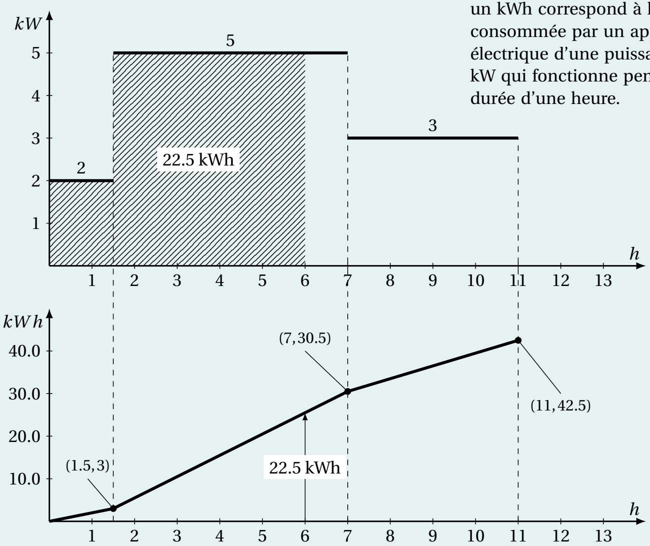


Relation entre Position et Vitesse

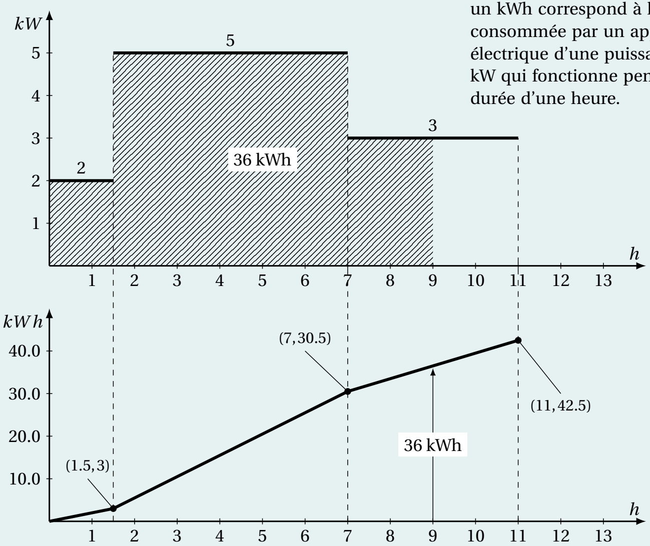


Exemple 3 : *relation puissance – énergie électrique*

un kWh correspond à l'énergie consommée par un appareil électrique d'une puissance d'un kW qui fonctionne pendant une durée d'une heure.



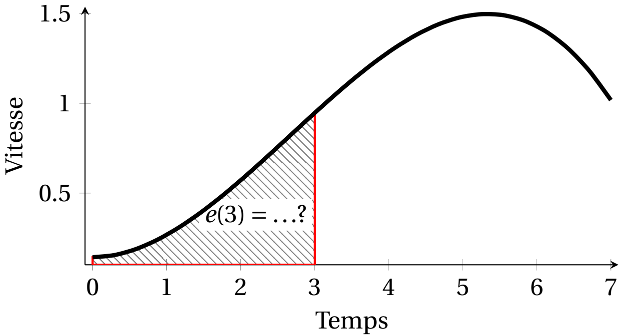
Exemple 3 : *relation puissance – énergie électrique*



un kWh correspond à l'énergie consommée par un appareil électrique d'une puissance d'un kW qui fonctionne pendant une durée d'une heure.

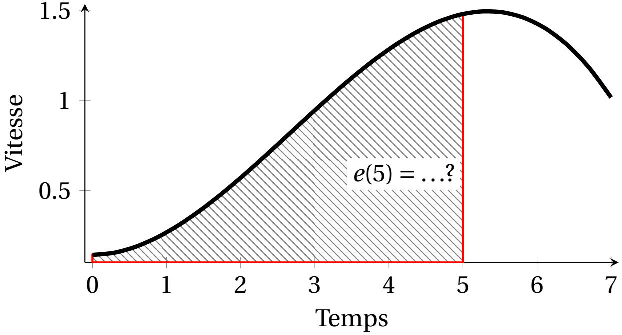
Réflexions

- L'aire sous la représentation graphique d'une fonction constante ou linéaire est très simple à calculer.
- Si la vitesse d'un objet ne varie pas à un rythme constant, alors la courbe vitesse-temps n'est pas une droite et on ne peut pas trouver facilement l'aire de cette manière.



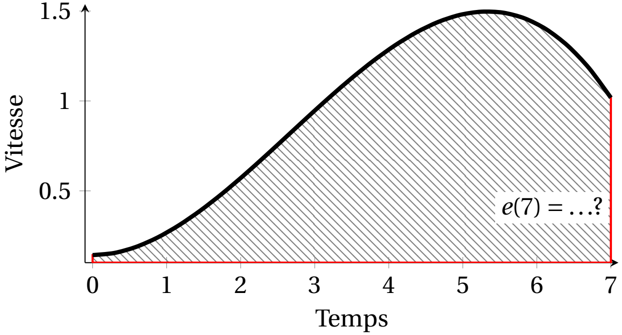
Réflexions

- L’aire sous la représentation graphique d’une fonction constante ou linéaire est très simple à calculer.
- Si la vitesse d’un objet ne varie pas à un rythme constant, alors la courbe vitesse-temps n’est pas une droite et on ne peut pas trouver facilement l’aire de cette manière.

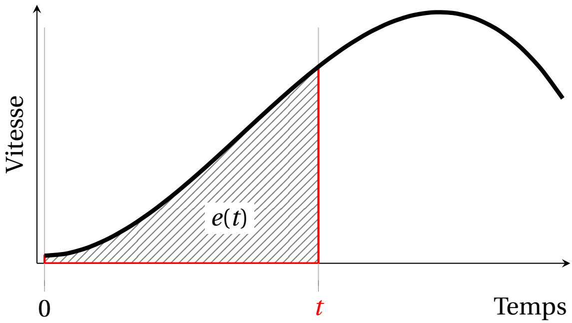


Réflexions

- L'aire sous la représentation graphique d'une fonction constante ou linéaire est très simple à calculer.
- Si la vitesse d'un objet ne varie pas à un rythme constant, alors la courbe vitesse-temps n'est pas une droite et on ne peut pas trouver facilement l'aire de cette manière.

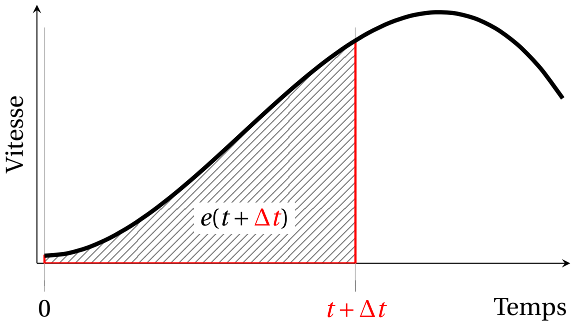


$e(t)$ = aire hachurée A_1



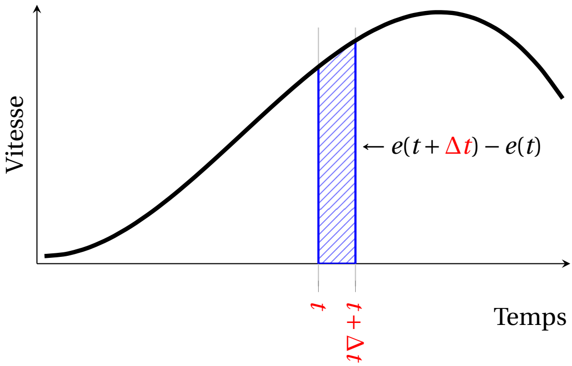
L'aire hachurée A_1 sous la courbe de vitesse $v(t)$ depuis $t = 0$ jusqu'à un temps t spécifique représente la distance parcourue par l'objet sur cet intervalle de temps.

$e(t + \Delta t)$ = aire hachurée A_2



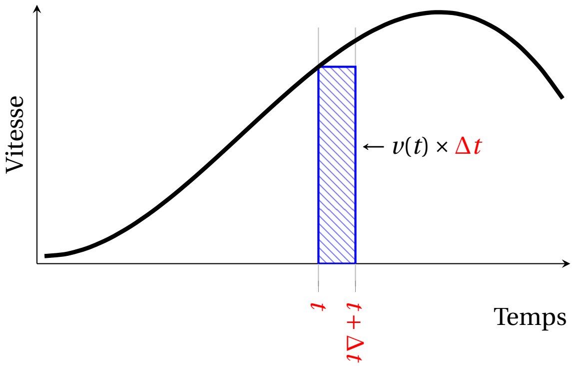
L'ajout de Δt, un intervalle de temps infiniment petit, permet d'examiner comment la distance parcourue varie quand l'intervalle de temps est augmente.

$e(t+\Delta t) - e(t) =$ aire hachurée $\Delta A = A_2 - A_1$



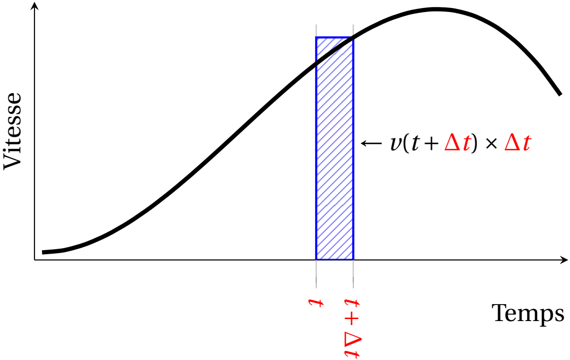
- L'expression $e(t+\Delta t) - e(t)$ illustre la variation de la distance parcourue entre les instants t et $t+\Delta t$.
- Bien qu'on ne puisse pas calculer cette aire de manière exacte, il est possible de l'approximer par des sous-estimations et sur-estimations.

Sous-estimation



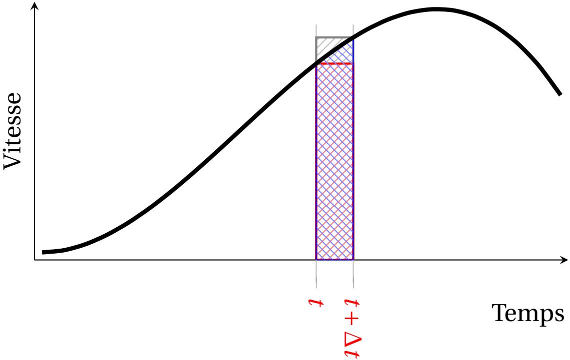
$$v(t) \times \Delta t < e(t + \Delta t) - e(t)$$

Sur-estimation



$$e(t+\Delta t) - e(t) < v(t+\Delta t) \times \Delta t$$

Synthèse



$$v(t) \times \Delta t < e(t+\Delta t) - e(t) < v(t+\Delta t) \times \Delta t$$

Conclusion

$$v(t) \times \Delta t < e(t+\Delta t) - e(t) < v(t+\Delta t) \times \Delta t$$

$\div \Delta t$ $\qquad\qquad$ $\div \Delta t$

$$v(t) < \frac{e(t+\Delta t) - e(t)}{\Delta t} < v(t+\Delta t)$$

limite pour $\Delta t \to 0$ $\qquad\qquad$ limite pour $\Delta t \to 0$

$$\lim_{\Delta t \to 0} v(t) < \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e(t+\Delta t) - e(t)}{\Delta t} < \lim_{\Delta t \to 0} v(t+\Delta t)$$

Théorème des gendarmes : $e'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e(t+\Delta t) - e(t)}{\Delta t} = v(t)$

$e(t)$ « aire sous une courbe » $v(t)$ $\quad \leftrightharpoons \quad$ $e(t)$ primitive de $v(t)$

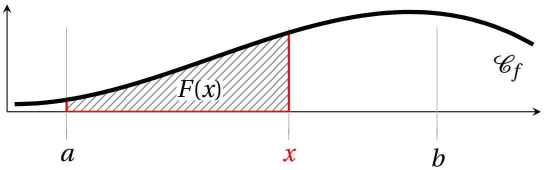
Intégrale définie

Théorème fondamental du calcul intégral

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, et si, pour tout $x \in [a,b]$, on pose

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

alors F est dérivable sur $[a,b]$ et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.



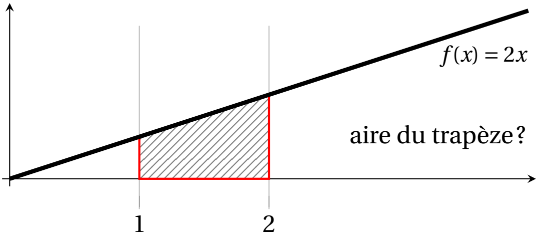
- *Toute fonction* ***continue*** *sur un intervalle* ***admet au moins une primitive*** *sur cet intervalle.*
- *Dans certains cas, il est impossible de fournir une primitive en utilisant les fonctions standard connues.* par ex. : $x \longmapsto e^{-x^2}$

Calcul pratique d'une intégrale définie

Soit f une fonction continue (et pas forcément positive) sur $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \quad \text{que l'on note aussi} \quad F(x)\Big|_a^b$$

Exemple : $\displaystyle\int_1^2 2x\,\mathrm{d}x = x^2\Big|_1^2 = 2^2 - 1^2 = 3$ (f POSITIVE sur $[1,2] \implies$ AIRE)



Exemples

- $$\int_2^0 x^2 + x \, \mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_2^0$$
  $$= \left(\frac{0}{3} + \frac{0}{2}\right) - \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2}\right)$$
  $$= -\frac{14}{3}$$
- $$\int_0^{\pi/2} (3x + 2\cos x) \, \mathrm{d}x = 3\int_0^{\pi/2} x \, \mathrm{d}x + 2\int_0^{\pi/2} \cos x \, \mathrm{d}x$$
  $$= 3\frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi/2} + 2\sin x \Big|_0^{\pi/2}$$
  $$= 3\left(\frac{(\pi/2)^2}{2} - 0\right) + 2\left(\sin(\pi/2) - \sin(0)\right)$$
  $$= 3 \cdot \frac{\pi^2}{8} + 2$$

Vocabulaire

- a et b s'appellent respectivement « borne inférieure » et « borne supérieure » de l'intégrale.
- La valeur de l'intégrale ne dépend que de a, b et f ; la variable x n'intervenant pas dans le résultat, on dit qu'elle est muette et l'on peut donc noter indifféremment :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

Propriétés

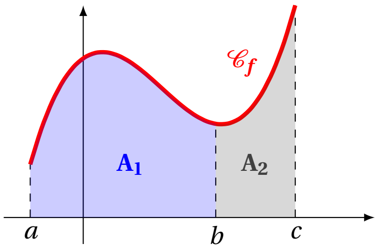
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$. On a :

- $\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$
- $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (Sens de parcours)

Relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c, trois réels appartenant à I.
Alors :

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$



*Lorsque f est **positive** et continue sur $[a;c]$ et que $b \in [a;c]$, la relation de Chasles est la simple traduction de l'additivité des aires de deux domaines adjacents*