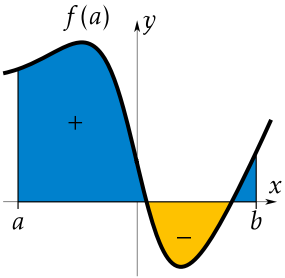
Calcul intégral

Frédéric Lancereau

22 avril 2020

Introduction

L'intégration est un concept fondamental en mathématiques, issu du calcul des aires et de l'analyse, et utilisé dans de nombreuses branches des mathématiques.

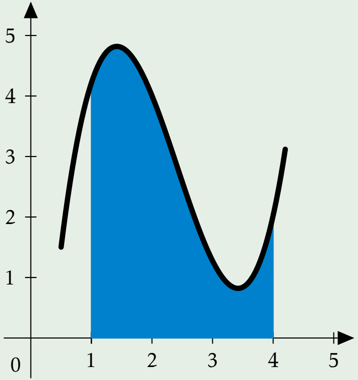


Idée de départ :

Considérer un objet géométrique comme étant constitué par un nombre infini de parties (elles-mêmes infiniment petites) dont l'aire ou le volume est facilement calculable.

Approximation d'une surface

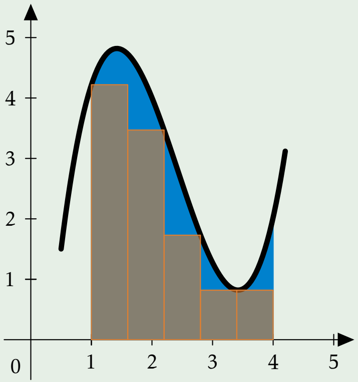
Une fonction continue ET positive sur l'intervalle $[a\,;b]=[1\,;4]$



- Que vaut l'aire située entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=4$

Approximation d'une surface

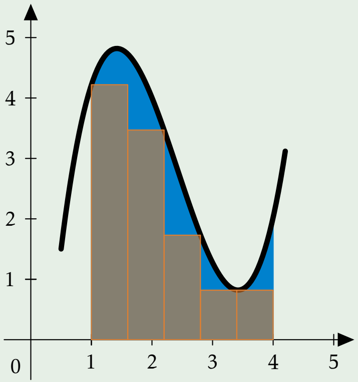
Sous-estimation de l'aire sous la courbe



- On remplace la courbe par celle d'une fonction en escalier

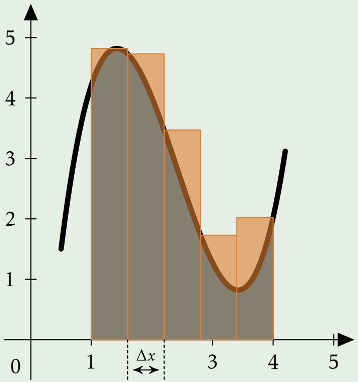
Approximation d'une surface

Sous-estimation de l'aire sous la courbe



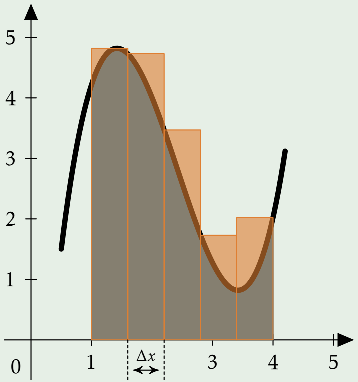
- On remplace la courbe par celle d'une fonction en escalier
- Vocabulaire : somme de **Darboux** inférieure

Sur-estimation de l'aire sous la courbe



- La base des rectangles mesure $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{5}$: Partition régulière

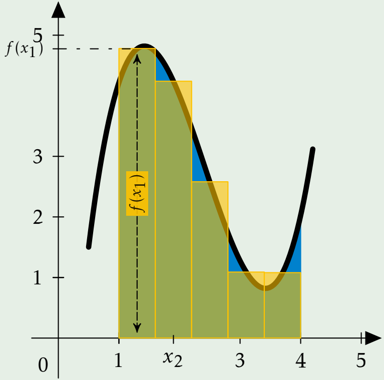
Sur-estimation de l'aire sous la courbe



- La base des rectangles mesure $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{5}$: Partition régulière
- Vocabulaire : somme de **Darboux** supérieure

Approximation d'une surface

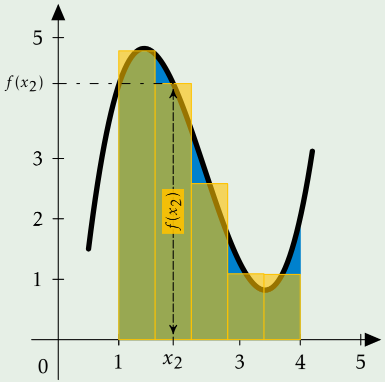
Une autre estimation de l'aire sous la courbe



- Hauteur 1er rectangle : $f(x_1)$ où $x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{8}{5}\right)$
- Vocabulaire : somme de **Riemann** (méthode du point milieu)

Approximation d'une surface

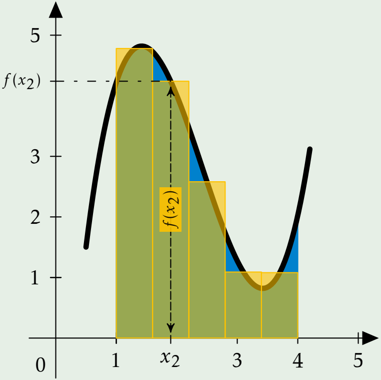
Une autre estimation de l'aire sous la courbe



- Hauteur 2ème rectangle : $f(x_2)$ où $x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{5} + \frac{11}{5}\right)$

Approximation d'une surface

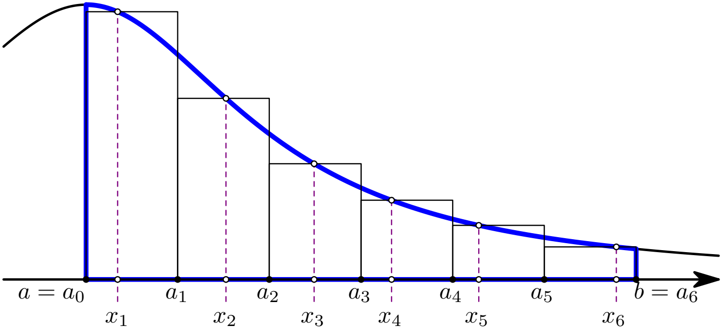
Une autre estimation de l'aire sous la courbe



- Hauteur 2ème rectangle : $f(x_2)$ où $x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{5} + \frac{11}{5}\right)$
- Ainsi de suite ...

Théorie illustrée : somme de Riemann

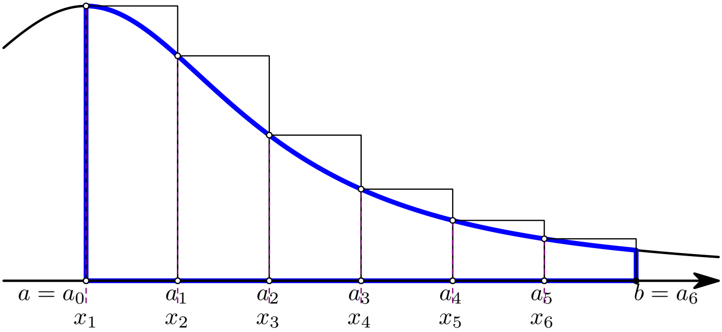
Partition régulière : on impose $a_k - a_{k-1} = \dfrac{b-a}{6} = \Delta x \quad (\forall k \in \{1, \cdots, 6\})$



$$\text{Aire} \approx f(x_1)(a_1 - a_0) + \cdots + f(x_6)(a_6 - a_5) \quad \text{où } x_k \in]a_{k-1}\,; a_k[$$

$$\approx \sum_{k=1}^{6} f(x_k)\,(a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=1}^{6} f(x_k)\,\Delta x$$

Théorie illustrée : somme de Riemann à gauche



$$\text{Aire} \approx \sum_{k=1}^{6} f(x_k) \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{6} f(a_{k-1}) \cdot \Delta x$$

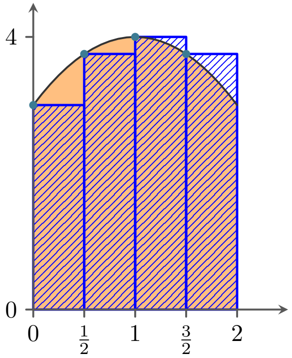
Comme $a_{k-1} = a + (k-1) \cdot \Delta x$, on écrit : $\text{Aire} \approx \sum_{k=1}^{6} f(a + (k-1) \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,;\, x \mapsto 4 - (x-1)^2$

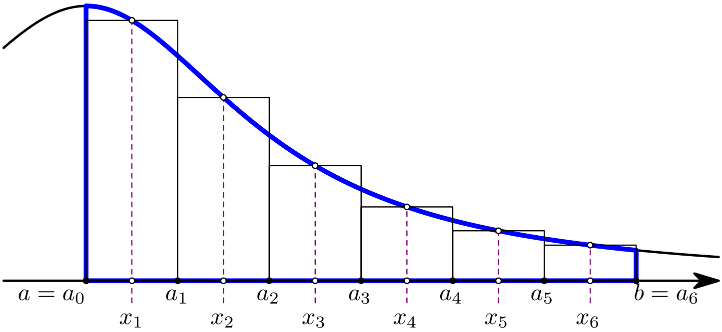
f est continue et positive !

somme des aires des rectangles :

$$\begin{aligned} A_4 &= \sum_{k=1}^{4} f\left(0 + (k-1)\cdot\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} f\left(\tfrac{k-1}{2}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left((4-1) + \left(4 - \tfrac{1}{4}\right) + 4 + \left(4 - \tfrac{1}{4}\right)\right) \\ &= 7{,}25 \end{aligned}$$



Somme de Riemann : méthode du point milieu



$$\text{Aire} \approx \sum_{k=1}^{6} f(x_k) \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{6} f\left(\frac{a_k + a_{k-1}}{2}\right) \cdot \Delta x$$

Comme $\frac{a_k + a_{k-1}}{2} = a + \left(k - \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta x$, on a : $\text{Aire} \approx \sum_{k=1}^{6} f\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta x\right) \cdot \Delta x$

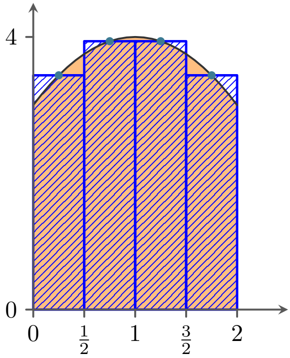
Exemple numérique : méthode du point milieu

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,;\, x \mapsto 4 - (x-1)^2$

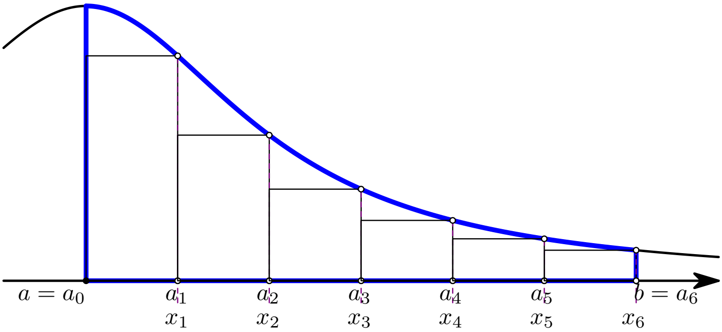
f est continue et positive !

somme des aires des rectangles :

$$\begin{aligned}
A_4 &= \sum_{k=1}^{4} f\left(0 + \left(k - \tfrac{1}{2}\right) \cdot \tfrac{1}{2}\right) \tfrac{1}{2} \\
&= \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{4} f\left(\tfrac{2k-1}{4}\right) \\
&= \tfrac{1}{2} \left(f(1/4) + f(3/4) + f(5/4) + f(7/4)\right) \\
&= 7{,}375
\end{aligned}$$



Théorie illustrée : somme de Riemann à droite



$$\text{Aire} \approx \sum_{k=1}^{6} f(x_k) \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{6} f(a_k) \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{6} f(a + k \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$$

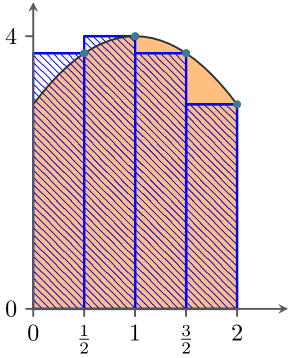
Exemple numérique : somme de Riemann à droite

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, x \mapsto 4-(x-1)^2$

f est continue et positive !

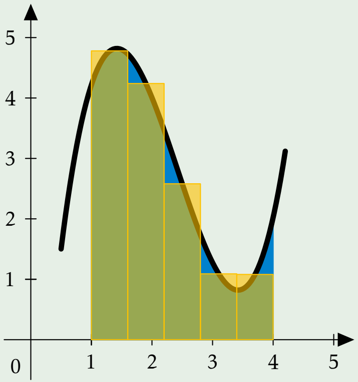
somme des aires des rectangles :

$$\begin{aligned} A_4 &= \sum_{k=1}^{4} f\left(0+k\cdot\tfrac{1}{2}\right)\tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{4} f\left(\tfrac{k}{2}\right) \\ &= \cdots \\ &= 7{,}25 \end{aligned}$$



Approximation d'une surface

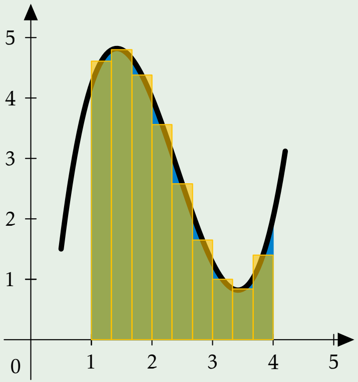
Comment améliorer l'approximation ?



Calcul de l'aire approximée : $A_5 = \sum_{k=1}^{5} f(x_k) \cdot \Delta x$

Approximation d’une surface

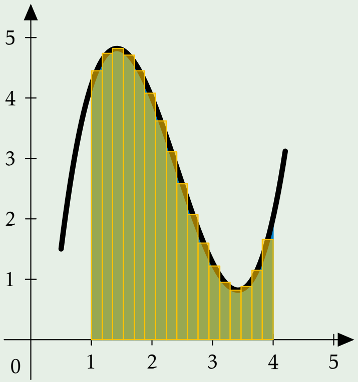
Comment améliorer l’approximation ?



Calcul de l’aire approximée : $A_9 = \sum_{k=1}^{9} f(x_k) \cdot \Delta x$

Approximation d'une surface

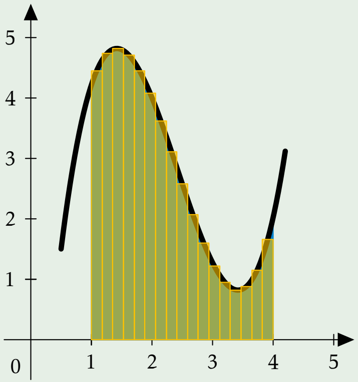
Comment améliorer l'approximation ?



Calcul de l'aire approximée : $A_{17} = \sum_{k=1}^{17} f(x_k) \cdot \Delta x$

Approximation d'une surface

Comment améliorer l'approximation ?



- On augmente le nombre de subdivisions
- Les intervalles deviennent de plus en plus fins

Pour une fonction continue et POSITIVE sur $[a\;;\;b]$

- L'aire totale formée par l'ensemble des rectangles vaut donc :

$$\mathrm{A}_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right) \cdot \Delta x$$

A_n **est appelé Somme de Riemann associée à la fonction f**

L'intégrale définie ≡ Aire pour f positive sur $[a\,;\,b]$

Pour une fonction continue et POSITIVE sur $[a\,;\,b]$

- L'aire totale formée par l'ensemble des rectangles vaut donc :

$$\mathrm{A}_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right) \cdot \Delta x$$

A_n **est appelé Somme de Riemann associée à la fonction f**

- En passant à la limite, on obtient l'aire exacte A

$$\boxed{\mathrm{A} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right) \cdot \Delta x}$$

L'intégrale définie ≡ Aire pour f positive sur $[a\,;\,b]$

Pour une fonction continue et POSITIVE sur $[a\,;\,b]$

- L'aire totale formée par l'ensemble des rectangles vaut donc :

$$\mathrm{A}_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right) \cdot \Delta x$$

A_n **est appelé Somme de Riemann associée à la fonction** f

- En passant à la limite, on obtient l'aire exacte A

$$\boxed{\mathrm{A} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right) \cdot \Delta x}$$

- Si cette limite existe, la quantité A est appelée **l'intégrale définie de la fonction** $f(x)$ **de** a **à** b et est notée :

$$\boxed{\mathrm{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Peu importe le signe de f sur $[a\,;\,b]$!

Synthèse

Somme de Riemann à droite :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\Delta x)\Delta x$$

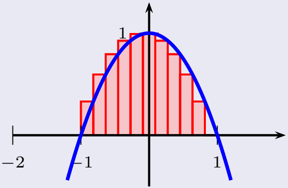
Somme de Riemann à gauche :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(a + (k-1)\Delta x)\Delta x$$

Méthode du point milieu :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta x\right)\Delta x$$

Soit $f : x \to 1 - x^2$ une fonction positive sur l'intervalle $[-1\,;1]$



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, x \to 1 - x^2$

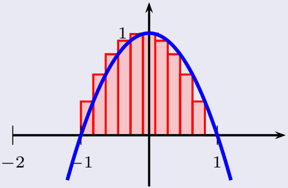
$$\int_{-1}^{1} 1 - x^2 \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 - x_k^2\right) \Delta x$$

avec : $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$ et $x_k = -1 + k \cdot \frac{2}{n}$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{2k-n}{n}\right)^2\right) \frac{2}{n}$$

Soit $f : x \to 1 - x^2$ une fonction positive sur l'intervalle $[-1\,;1]$



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\; x \to 1 - x^2$

$$\int_{-1}^{1} 1 - x^2 \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 - x_k^2\right) \Delta x$$

avec : $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$ et $x_k = -1 + k \cdot \frac{2}{n}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{2k-n}{n}\right)^2\right) \frac{2}{n}$$

donc
$$\int_{-1}^{1} 1 - x^2 \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{8\left(-k^2 + kn\right)}{n^3}$$

$$= 8 \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} \right)$$

L'intégrale définie ≡ Aire pour f positive sur $[a\,;\,b]$

$$\int_{-1}^{1} 1 - x^2 \mathrm{d}x = 8 \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} \right)$$

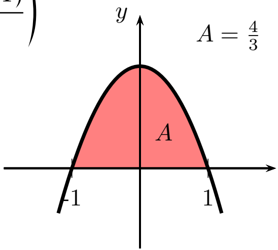
$$= 8 \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \right)$$

$$\text{Or : } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$= 8 \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{2n} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \right)$$

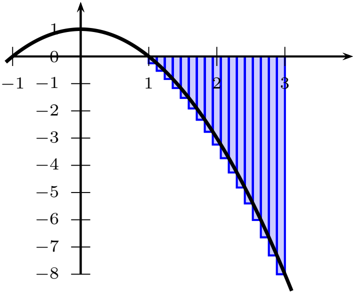
$$= 8 \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{2n} - \frac{2n^3}{6n^3} \right)$$

$$= 8 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}$$



Supposons f négative sur son intervalle d'intégration

$$\forall x \in [a;b] : f(x) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum \overbrace{f(x_k)}^{<0} \ \overbrace{\Delta x}^{>0} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < 0$$



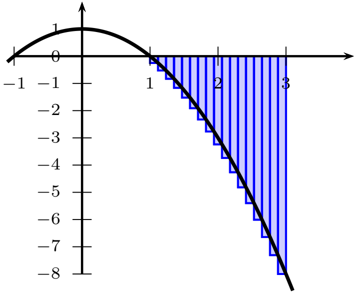
$$\mathrm{I} = \int_1^3 \left(1 - x^2\right) \mathrm{d}x \qquad \left(\Delta x = \tfrac{3-1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(1 + k \cdot \tfrac{2}{n}\right) \tfrac{2}{n} \qquad \text{(S.R. à D.)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \left(1 + \frac{2k}{n}\right)^2\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{8k}{n^2} - \frac{8k^2}{n^3}\right)$$

Intégrale définie - fonction négative



$$\mathrm{I} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{8k}{n^2} - \frac{8k^2}{n^3}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} -\frac{8}{n^2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2\right)$$

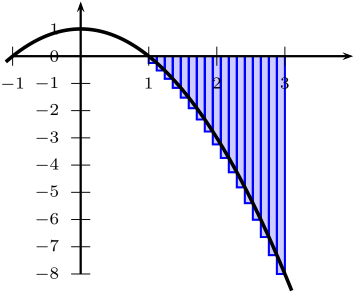
$$= \lim_{n\to+\infty} -\frac{8}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{2} n(n+1) + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\right)\right)$$

donc

$$\int_1^3 \left(1 - x^2\right) \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} -\frac{8}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{2} n(n+1) + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} -\frac{4\left(5n^2 + 6n + 1\right)}{3n^2} = -\frac{20}{3} < 0 \implies \text{Aire Géométrique}$$

Intégrale définie - fonction négative



$$\mathrm{I} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{8k}{n^2} - \frac{8k^2}{n^3} \right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} -\frac{8}{n^2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 \right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} -\frac{8}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{2} n(n+1) + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right) \right)$$

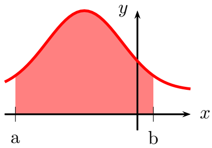
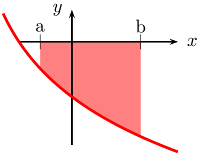
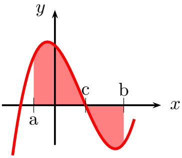
donc

$$\int_1^3 \left(1 - x^2\right) \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} -\frac{8}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{2} n(n+1) + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right) \right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} -\frac{4\left(5n^2 + 6n + 1\right)}{3n^2} = -\frac{20}{3}$$

Voc. : Aire algébrique

Intégrale définie et Aire géométrique

	f positive sur $[a\,;b]$	$\text{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
	f négative sur $[a\,;b]$	$\text{A} = \int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\text{A} = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\text{A} = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$
	f positive sur $[a;c]$ f négative sur $[c;b]$	$\text{A} = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ $-\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$