1 Combinaisons de manipulations

1.1 Préambule

La fonction g est associée à sa fonction de référence f et chaque point $M"$ du graphe de g provient d'une transformation du plan appliquée à un point M du graphe de f.

$$M(a,b) \in \mathscr{C}_f \xrightarrow{\text{Manipulations graphiques}} \mathscr{C}_g \ni M"(a",b")$$

Ces transformations du plan s'effectuent en deux temps : suivant l'axe des abscisses (Ox - horizontalement) puis suivant l'axe des ordonnées (Oy - verticalement). L'illustration précédente peut donc se dessiner sous la forme d'un **diagramme** comme suit :

$$\begin{tikzcd}
\text{1°)} & a \arrow[r, Rightarrow, "\text{Transformations selon } Ox"] \arrow[d, dashed, "f"'] & a" \arrow[d, dashed, "g"] \\
\text{2°)} & b \arrow[r, Rightarrow, "\text{Transformations selon } Oy"'] & b"
\end{tikzcd}$$

Les transformations du plan s'effectuent dans l'ordre suivant :

1. Horizontalement (selon l'axe Ox) puis,
2. Verticalement (selon l'axe Oy)

1.2 Ordre des manipulations

La *difficulté* réside dans l'ordre d'application des manipulations au sein même d'une transformation.

En effet, une transformation horizontale peut contenir une translation (à droite ou à gauche) et une dilatation (ou contraction) par rapport à Oy.

De la même façon, une transformation verticale peut être formée d'une translation (vers le haut ou vers le bas) et d'une dilatation (ou contraction) par rapport à Ox.

$$\begin{tikzcd}
\text{1°) Axe } (Ox) & a \arrow[r, Rightarrow, "\text{Translation}"] \arrow[d, dashed, "f"'] & a' \arrow[r, Rightarrow, "\text{Dilatation}"] & a" \arrow[d, dashed, "g"] \\
\text{2°) Axe } (Oy) & b \arrow[r, Rightarrow, "\text{Dilatation}"'] & b' \arrow[r, Rightarrow, "\text{Translation}"'] & b"
\end{tikzcd}$$

L'ordre des transformations géométriques correspond à l'ordre des opérations algébriques effectuées **de droite à gauche** dans le diagramme.

Exemple : Soit $g(x) = \mathbf{2} \cdot \sin(\mathbf{3} \cdot x + \pi) + \mathbf{1}$. On reconnait immédiatement la fonction de référence $f(x) = \sin(x)$.

Procédure pour établir le diagramme :

1. remplacer $a"$ par x et $b"$ par l'expression analytique de $g(x)$ (dernière colonne)
2. remplacer a par $\mathbf{3} \cdot x + \pi$ et b par $\sin(\mathbf{3} \cdot x + \pi)$ (première colonne).

3. a' est obtenu via l'opération de décomposition de $\mathbf{3}\cdot x+\pi$ en opérations algébriques élémentaires :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, shift left, "\times 3"] & 3.x \arrow[l, shift left, "\div 3"] \arrow[r, shift left, "+\pi"] & \mathbf{3}.x+\pi \arrow[l, shift left, "-\pi"] \end{tikzcd}$$

Finalement,

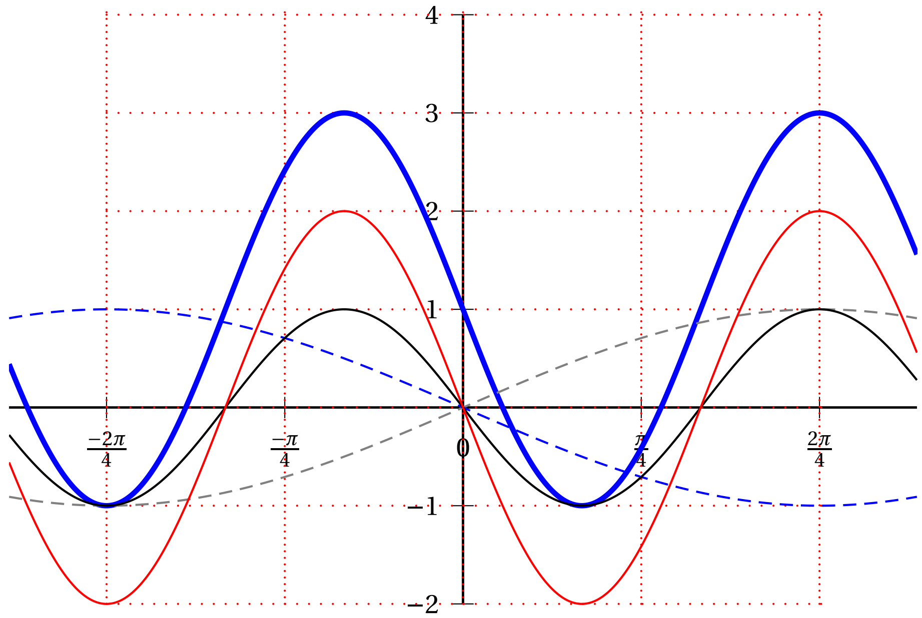
$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \text{1°) Axe } (Ox) & \mathbf{3}.x+\pi \arrow[r, Rightarrow, "-\pi", "TH\longleftarrow"'] \arrow[d, dashed, "f"'] & 3.x \arrow[r, Rightarrow, "\div 3", "\rightarrow CH\leftarrow"'] & x \arrow[d, dashed, "g"] \\ \text{2°) Axe } (Oy) & \sin(\mathbf{3}.x+\pi) \arrow[r, Rightarrow, "DV\updownarrow", "\times 2"'] & 2\cdot\sin(\mathbf{3}.x+\pi) \arrow[r, Rightarrow, "TV\uparrow", "+1"'] & 2\cdot\sin(\mathbf{3}.x+\pi)+1 \end{tikzcd}$$

Pour obtenir le graphe de g à partir de celui f, on effectuera donc les manipulations suivantes dans cet ordre :

1. (a) translation horizontale de π unités vers la gauche $(TH\longleftarrow\pi)$
   (b) contraction horizontale de facteur 3 par rapport à Oy $(\rightarrow CH\leftarrow)$
2. (a) dilatation verticale de facteur 2 par rapport à Ox $(DV\updownarrow 2)$
   (b) translation verticale de 1 unité vers le haut $(TV\uparrow 1)$

On retiendra donc que le sens des flèches du diagramme indique l'ordre d'application des manipulations à respecter.

Représentation graphique : :



Nous ne verrons cette année que des combinaisons de deux manipulations de graphe simultanées. Voici quatre exemples détaillés.

1.3 Courbe représentative de la fonction $g\,:\,x\mapsto\sqrt{x+2}-1$

On établit le diagramme suivant sachant que la fonction de référence $\sqrt{\bullet}$ s'applique à $x+2$:

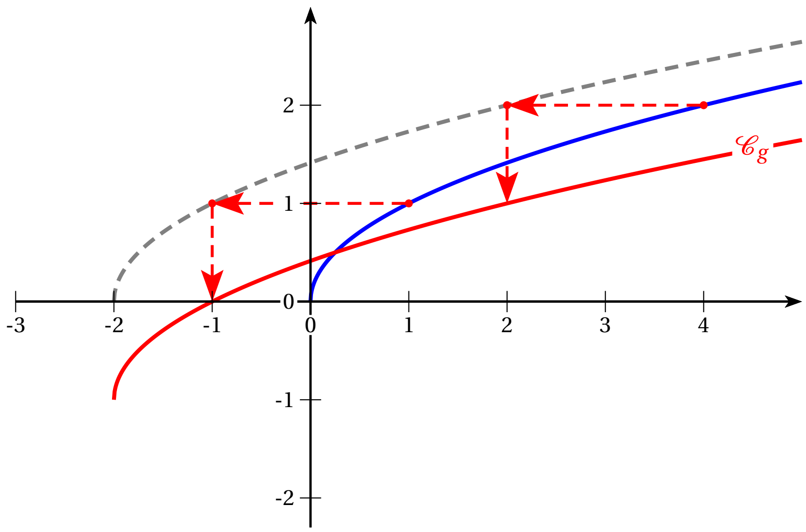
Diagramme :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
1°) & x+2 \arrow[r, Rightarrow, "-2"] \arrow[d, dashed, "\sqrt{\bullet}"'] & x \arrow[d, dashed, "g"] \\
2°) & \sqrt{x+2} \arrow[r, Rightarrow, "-1"'] & \sqrt{x+2}-1
\end{tikzcd}$$

Ordre des manipulations :

1. translation horizontale de 2 unités vers la gauche $(TH \longleftarrow 2)$
2. translation verticale de 1 unité vers le bas $(TV \downarrow 1)$

Représentation graphique : :



1.4 Courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto 2 \cdot \sin(x) - 1$

On établit le diagramme suivant sachant que la fonction de référence $\sin(\bullet)$ s'applique à x :

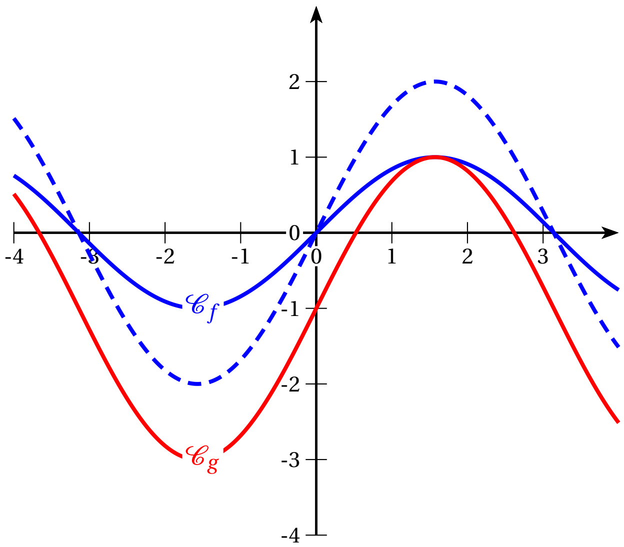
Diagramme :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
1°) & x \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[d, dashed, "\sin(\bullet)"'] & & x \arrow[d, dashed, "g"] \\
2°) & \sin(x) \arrow[r, Rightarrow, "\times 2"'] & 2 \cdot \sin(x) \arrow[r, Rightarrow, "-1"'] & 2 \cdot \sin(x) - 1
\end{tikzcd}$$

Ordre des manipulations :

1. Aucune manipulation horizontale.
2. (a) dilatation verticale de facteur 2 par rapport à Ox $(DV \updownarrow 2)$
   (b) translation verticale de 1 unité vers le bas $(TV \downarrow 1)$

Représentation graphique : :



1.5 Courbe représentative de la fonction $\quad g : x \mapsto \frac{1}{2.x} - 1$

On établit le diagramme suivant sachant que la fonction de référence $\frac{1}{\bullet}$ s'applique à $2.x$:

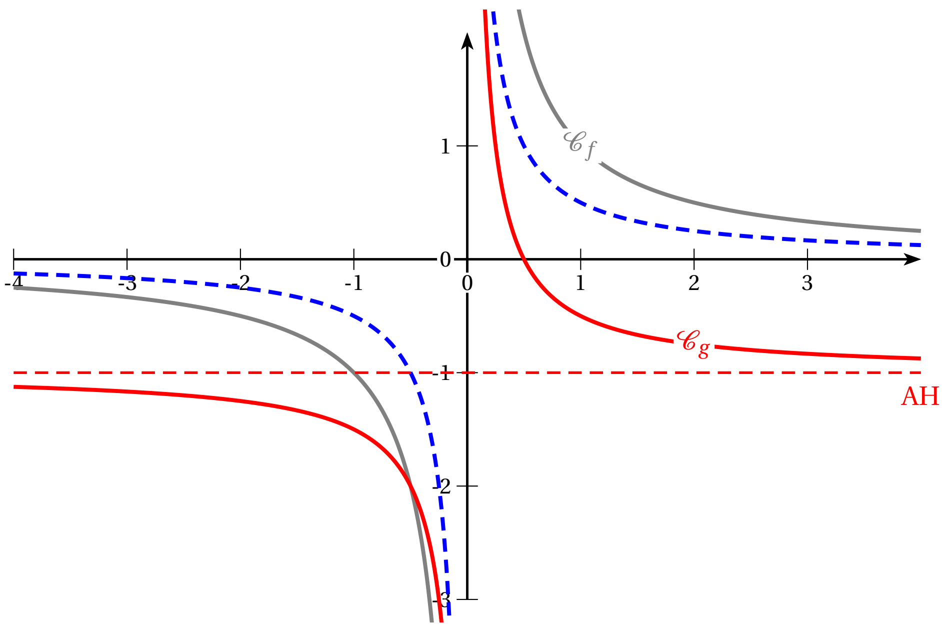
Diagramme :

$$\begin{tikzcd}
1°) & 2.x \arrow[rr, Rightarrow, "\div 2"] \arrow[d, dashed, "\frac{1}{\bullet}"'] & & x \arrow[d, dashed, "g"] \\
2°) & \frac{1}{2x} \arrow[rr, Rightarrow, "-1"'] & & \frac{1}{2.x} - 1
\end{tikzcd}$$

Ordre des manipulations :

1. contraction horizontale de facteur 2 $\qquad (\rightarrow CH \leftarrow)$
2. translation verticale de 1 unité vers le bas $\qquad (TV \downarrow 1)$

Représentation graphique : :



1.6 Courbe représentative de la fonction $\quad g\,:\,x \mapsto (2\cdot x-1)^2$

On établit le diagramme suivant sachant que la fonction de référence $(\bullet)^2$ s'applique à $2\cdot x-1$:

Diagramme :

$$\begin{tikzcd}
1°) & 2.x-1 \arrow[r, Rightarrow, "+1"'] \arrow[d, dashed, "(\bullet)^2"'] & 2.x \arrow[r, Rightarrow, "\div 2"'] & x \arrow[d, dashed, "g"] \\
2°) & (2.x-1)^2 \arrow[rr, Rightarrow] & & (2.x-1)^2
\end{tikzcd}$$

Ordre des manipulations :

1. (a) translation horizontale de 1 unité vers la droite $\qquad (TH \rightarrow 1)$
   (b) contraction horizontale de facteur 2 par rapport à Oy $\qquad (\rightarrow CH \leftarrow)$
2. Aucune manipulation verticale.

Représentation graphique : :