La méthode d'intégration des fonctions rationnelles est une technique d'intégration utilisée pour résoudre des intégrales de la forme $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes et $Q(x) \neq 0$. Cette méthode repose sur le fait que toute fonction rationnelle peut être décomposée en une somme de fractions simples.

On supposera que les polynômes du numérateur et du dénominateur n'ont pas de racines communes.

Définition : La fonction rationnelle f est une fraction régulière si le degré du numérateur est strictement inférieure à celui du dénominateur.

Si cette fraction n'est pas régulière (irrégulière donc), on divisera le numérateur par le dénominateur afin d'obtenir la forme suivante

$$f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

où $Q(x)$ est un polynôme et où $\frac{R(x)}{D(x)}$ est une fraction régulière.

Exemple : Soit

$$f(x) = \frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1}$$

une fraction rationnelle irrégulière.

Une division euclidienne évidente permet d'écrire : $f(x) = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x-6}{x^2+2x+1}$

L'intégration des polynômes ne présentant aucune difficulté, on s'orientera donc vers l'intégration de fraction rationnelles régulières. La technique permettant de réaliser cette tâche est de scinder cette fraction régulière en somme de fractions partielles qui seront intégrées séparément.

Méthode

La première étape à réaliser pour scinder une fonction rationnelle régulière est de factoriser le dénominateur de celle-ci en :

— produit de facteurs linéaire (de type $ax + b$)

— produit de facteurs du second degré (de type $ax^2 + bx + c$) irréductible

La deuxième étape est de scinder la fraction régulière en une somme de fractions partielles en respectant les quatre règles suivantes :

Règle 1 L'apparition d'un facteur linéaire unique $(ax + b)$ au dénominateur amène une fraction partielle de la forme

$$\frac{A}{ax+b}$$

où A est une constante à déterminer.

Règle 2 L'apparition d'un facteur linéaire qui apparaît n fois $((ax+b)^n)$ au dénominateur amène une somme de n fractions partielles de la forme

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

où les A_i sont des constantes à déterminer.

Règle 3 L'apparition d'un facteur du second degré irréductible unique (ax^2+bx+c) au dénominateur amène une fraction partielle de la forme

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

où A, B sont des constantes à déterminer.

Règle 4 L'apparition d'un facteur du second degré irréductible qui apparaît n fois $(\left(ax^2+bx+c\right)^n)$ au dénominateur amène une somme de n fractions partielles de la forme

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}$$

où les A_i, B_i sont des constantes à déterminer.

Exemple 1 :

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x &= \int -\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}\,\mathrm{d}x\\ &= -2\ln|x-1|+3\ln|x-2|+C\end{aligned}$$

en effet, $\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2} \iff \dfrac{x+1}{x^2-3x+2}=\dfrac{A(x-2)}{x^2-3x+2}+\dfrac{B(x-1)}{x^2-3x+2} \implies \begin{cases}A+B=1\\ -2A-B=1\end{cases}$

Exemple 2 :

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\left(x^2+1\right)(x-1)}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C\end{aligned}$$

Exemple 3 :

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{1}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x-\frac{2}{9}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x+\frac{2}{9}\int \frac{1}{x-2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2}{9}\ln|x+1|+\frac{2}{9}\ln|x-2|+C\\ &= -\frac{2x-1}{6(x+1)^2}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C\end{aligned}$$

Exercices

1 (a) Déterminer les constantes réelles a, b et c telles que

$$\frac{x^2-x-1}{x^2+2x+3}=a+\frac{bx+c}{x^2+2x+3}$$

(b) Calculer

$$\int \frac{x^2-x-1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$$

2 (a) Déterminer les constantes réelles p, q et r telles que :

$$\frac{2x-3}{x^2(x+2)}=\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}+\frac{r}{x+2}$$

(b) En déduire le calcul de

$$\int \frac{2x-3}{x^2(x+2)}\,\mathrm{d}x$$

3 Calculer :

(a) $\displaystyle\int \frac{2x}{(x-1)(2x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x^2-3}{(x-1)^3(x+1)}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3-1}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \frac{3x-37}{x^2-3x-4}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+6x+8}$

(g) $\displaystyle\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x^2+1)}$