Calcul intégral

Application — Valeur moyenne

F. Lancereau

Valeur moyenne d'une fonction

Définition

La valeur moyenne d'une fonction intégrable sur un intervalle $[a, b]$ est le réel μ vérifiant

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

▸ Pour en savoir plus

Illustration

Exemple 1

$f(t) = t^2 - 5t + 6\cos(\pi t)$ sur $\left[-1, \frac{5}{2}\right]$

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{\frac{5}{2} - (-1)} \int_{-1}^{\frac{5}{2}} t^2 - 5t + 6\cos(\pi t)\, dt \\
&= \frac{2}{7}\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + \frac{6}{\pi}\sin(\pi t)\right)\Big|_{-1}^{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{12}{7\pi} - \frac{13}{6} \\
&= -1.620993
\end{aligned}$$

Exemple 2

$R(z) = \sin(2z)\, e^{1-\cos(2z)}$ sur $[-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{\pi - (-\pi)} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2z)\, e^{1-\cos(2z)}\, dz \\
&= \frac{1}{4\pi} e^{1-\cos(2z)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Exemple 2

$R(z) = \sin(2z)\, \mathrm{e}^{1-\cos(2z)}$ sur $[-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{\pi - (-\pi)} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2z)\, \mathrm{e}^{1-\cos(2z)}\, dz \\ &= \frac{1}{4\pi} \mathrm{e}^{1-\cos(2z)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

La valeur moyenne de cette fonction sur $[-\pi, \pi]$ vaut 0. Pas d'inquiétude, cela arrive parfois. Il suffit d'observer le graphique suivant pour s'en convaincre.

Exemple 2

$R(z) = \sin(2z)\, e^{1-\cos(2z)}$ sur $[-\pi, \pi]$

Théorème de la moyenne

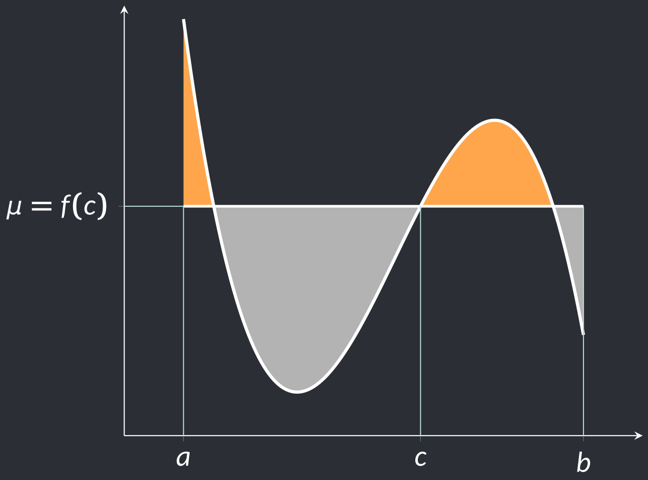
Définition

Si, de plus, f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ alors :

$$\exists c \in]a, b[\ : \ f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

▸ Pour en savoir plus

Illustration



Exemple 3

Déterminez le nombre c qui satisfait le théorème de la moyenne pour les intégrales pour la fonction

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

sur l'intervalle $[1, 4]$.

Exemple 3

Déterminez le nombre c qui satisfait le théorème de la moyenne pour les intégrales pour la fonction

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

sur l'intervalle $[1, 4]$.

Commençons par remarquer que la fonction est un polynôme et est donc continue sur l'intervalle donné. Cela signifie que nous pouvons utiliser le théorème de la moyenne. Faisons-le donc.

Théorème de la moyenne

$$\exists c \in \,]a, b[\ : \ \int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a)$$

$$\int_1^4 x^2 + 3x + 2\, dx = \left(c^2 + 3c + 2\right)(4-1)$$

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)\Big|_1^4 = 3\left(c^2 + 3c + 2\right)$$

$$\frac{99}{2} = 3c^2 + 9c + 6$$

$$0 = 3c^2 + 9c - \frac{87}{2}$$

$$0 = 3c^2 + 9c - \frac{87}{2}$$

C’est une équation quadratique que nous pouvons résoudre. En utilisant la formule quadratique, nous obtenons les deux solutions suivantes :

$$0 = 3c^2 + 9c - \frac{87}{2}$$

C'est une équation quadratique que nous pouvons résoudre. En utilisant la formule quadratique, nous obtenons les deux solutions suivantes :

$$c = \frac{-3 + \sqrt{67}}{2} = 2,593$$

$$c = \frac{-3 - \sqrt{67}}{2} = -5,593$$

$$0 = 3c^2 + 9c - \frac{87}{2}$$

C'est une équation quadratique que nous pouvons résoudre. En utilisant la formule quadratique, nous obtenons les deux solutions suivantes :

$$c = \frac{-3 + \sqrt{67}}{2} = 2,593$$

$$c = \frac{-3 - \sqrt{67}}{2} = -5,593$$

Il est clair que le second nombre n'est pas dans l'intervalle, donc ce n'est pas celui que nous recherchons. En revanche, le premier est bien dans l'intervalle, c'est donc le nombre que nous voulons.

$$0 = 3c^2 + 9c - \frac{87}{2}$$

C’est une équation quadratique que nous pouvons résoudre. En utilisant la formule quadratique, nous obtenons les deux solutions suivantes :

$$c = \frac{-3 + \sqrt{67}}{2} = 2,593$$

$$c = \frac{-3 - \sqrt{67}}{2} = -5,593$$

Il est clair que le second nombre n’est pas dans l’intervalle, donc ce n’est pas celui que nous recherchons. En revanche, le premier est bien dans l’intervalle, c’est donc le nombre que nous voulons.
Remarquez qu’il est possible que les deux nombres se trouvent dans l’intervalle, alors ne vous attendez pas à n’en trouver qu’un seul.

Valeur Moyenne d’une Fonction

Exercices d’entraînement — Problèmes à résoudre

Liens

- ▸ Exercices d’entraînement
- ▸ Problèmes à résoudre

Renforcement math.

Que vaut c ?