Calcul intégral

Application – Valeur moyenne

F. Lancereau

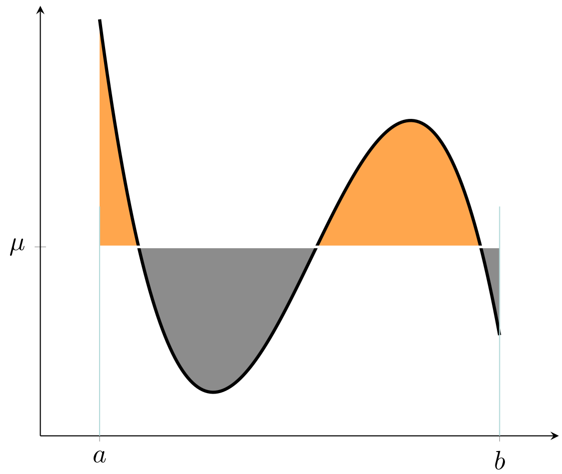
14 mars 2025

Valeur moyenne d'une fonction

Définition
La valeur moyenne d'une fonction *intégrable* sur un intervalle $[a, b]$ est le réel μ vérifiant

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ dx$$

Illustration



Exemple 1

$f(t) = t^2 - 5t + 6\cos(\pi\, t)\ \ sur\ \left[-1, \frac{5}{2}\right]$

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{\frac{5}{2} - (-1)} \int_{-1}^{\frac{5}{2}} t^2 - 5t + 6\cos(\pi\, t)\ dt \\
&= \frac{2}{7}\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + \frac{6}{\pi}\sin(\pi t)\right)\Big|_{-1}^{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{12}{7\pi} - \frac{13}{6} \\
&= -1.620993
\end{aligned}$$

Exemple 2

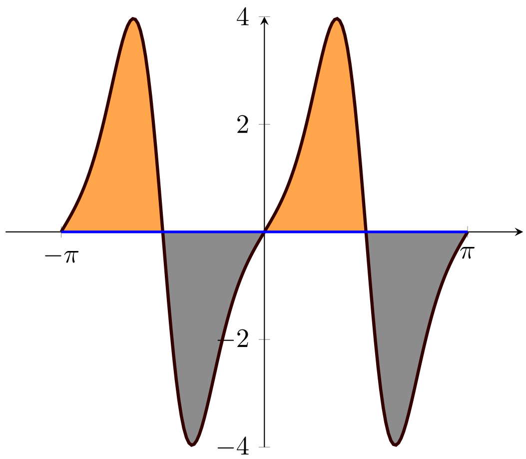
$R(z) = \sin(2z)\,\mathbf{e}^{1-\cos(2z)}$ *sur* $[-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{\pi-(-\pi)}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2z)\,\mathbf{e}^{1-\cos(2z)}\,dz\\ &= \left.\frac{1}{4\pi}\mathbf{e}^{1-\cos(2z)}\right|_{-\pi}^{\pi}\\ &= 0\end{aligned}$$

La valeur moyenne de cette fonction sur $[-\pi, \pi]$ vaut 0. *Pas d'inquiétude, cela arrive parfois.* Il suffit d'observer le graphique suivant pour s'en convaincre.

Exemple 2

$R(z) = \sin(2z)\,\mathbf{e}^{1-\cos(2z)}$ *sur* $[-\pi, \pi]$



Théorème de la moyenne

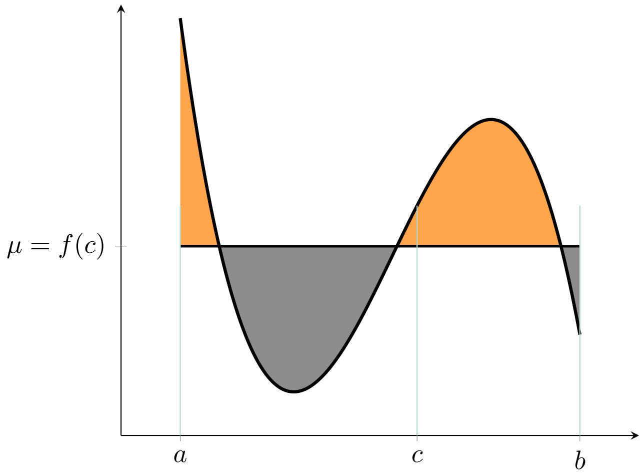
Définition

Si, de plus, f est *continue* sur l'intervalle $[a, b]$ alors :

$$\exists c \in\,]a, b[\ :\ f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$$

Pour en savoir plus

Illustration



Exemple 3

Déterminer le nombre c qui satisfait le théorème de la moyenne pour les intégrales pour la fonction

$$f(x) = x^2 + 3x + 2$$

sur l'intervalle $[1, 4]$.

Commençons par remarquer que la fonction est un polynôme et est donc continue sur l'intervalle donné. Cela signifie que l'on peut appliquer le théorème de la moyenne. Faisons-le.

Théorème de la moyenne

$$\exists c \in \,]a, b[\; : \; \int_a^b f(x) \; dx = f(c)(b-a)$$

$$\begin{aligned}
\int_1^4 x^2 + 3x + 2 \, dx &= \left(c^2 + 3c + 2\right)(4-1) \\
\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right)\Bigg|_1^4 &= 3\left(c^2 + 3c + 2\right) \\
\frac{99}{2} &= 3c^2 + 9c + 6 \\
0 &= 3c^2 + 9c - \frac{87}{2}
\end{aligned}$$

Résolution de l'équation quadratique

L'équation quadratique à résoudre est la suivante :

$$0 = 3c^2 + 9c - \frac{87}{2}$$

En appliquant la formule du discriminant, on obtient deux solutions :

$$c = \frac{-3+\sqrt{67}}{2} \approx 2{,}593$$
$$c = \frac{-3-\sqrt{67}}{2} \approx -5{,}593$$

Il est clair que la seconde valeur ne se trouve pas dans l'intervalle donné. La première, en revanche, appartient à l'intervalle et constitue donc la solution recherchée.

Remarque : il est possible que les deux solutions soient dans l'intervalle, donc ne vous attendez pas nécessairement à en trouver une seule.

Valeur Moyenne d'une Fonction

Liens

— Exercices pratiques

— Devoirs

Renforcement mathématique

Que vaut c ?