**UNIVERSITE DE MONS**

FACULTE POLYTECHNIQUE

*Examen d'admission - Algèbre et Analyse*

Groupe B - Mercredi 2 juillet 2014
solutions

## Question 1 (ALG14-18)

Pour réaliser deux tâches de calcul, on dispose de deux ordinateurs différents, dont on supposera les vitesses constantes mais pas nécessairement identiques : $v_1$ et $v_2$ sont exprimées en pétaFLOP par seconde, où le FLOP – FLoating-point OPeration – est l'unité de mesure de la quantité de travail informatique et péta est un préfixe multiplicatif (1 pétaFLOP/s $= 10^{15}$ opérations par seconde).
Lorsque le premier ordinateur réalise la première tâche et que le second ordinateur réalise la seconde, ils utilisent chacun le même temps. Par contre, pour réaliser l'autre tâche, ils mettent respectivement 9 secondes et 4 secondes pour arriver au bout.
Déterminez la taille des deux tâches (en pétaFLOP) en sachant que la quantité totale de travail est de 60 pétaFLOP. Déterminez aussi la vitesse de chacun des deux ordinateurs.

## Question 2 (ANA14-03)

Rechercher l'ensemble des fonctions $f(x)$, définies et dérivables sur $]0; +\infty[$, vérifiant les deux conditions suivantes :

1. pour tout nombre réel $x$ strictement positif,

$$xf'(x) - f(x) = x^2 e^{2x},$$

2. pour tout nombre réel $x$ strictement positif,

$$g(x) = \frac{f(x)}{x},$$

si $g(x)$ est une fonction définie sur le même intervalle.

# Solutions

## Question 1 (ALG14-18)

En notant $x_1$ la taille de la première tâche et $x_2$ la taille de la seconde, on a que

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 60 \\ \frac{x_1}{v_1} - \frac{x_2}{v_2} &= 0 \\ \frac{x_1}{v_2} &= 9 \\ \frac{x_2}{v_1} &= 4 \end{aligned}$$

En extrayant $x_2 = 60 - x_1$ de la première équation, en exprimant les vitesses à partir des 2 dernières expressions, et en injectant le tout dans la deuxième équation, on obtient, après mise au même dénominateur,

$$\begin{aligned} 4.x_1^2 - 9.(60 - x_1)^2 &= 0 \\ 5.x_1^2 - 2.9.60.x_1 + 9.60^2 &= 0 \end{aligned}$$

Le réalisant de cette équation vaut

$$\begin{aligned} \rho &= (2.9.60)^2 - 4.5.9.60^2 \\ &= 2^2.60^2.9.(9 - 5) \\ &= 2^2.60^2.3^2.2^2 \\ &= (12.60)^2 \end{aligned}$$

et les racines

$$\begin{aligned} x_{1\pm} &= \frac{2.9.60 \pm 2.6.60}{2.5} \\ &= (3 \pm 2).36 \end{aligned}$$

La résolution de cette équation donne deux valeurs pour $x_1$, soit 180 (qui n'est pas compatible avec la quantité totale) soit 36. En prenant $x_1 = 36$ pétaFLOP, on a que $x_2 = 24$ pétaFLOP. On en déduit que $v_1 = 6\text{pétaFLOP}/s$ et $v_2 = 4\text{pétaFLOP}/s$.

## Question 2 (ANA14-03)

La fonction $g$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$.
De plus, pour $x>0$,

$$g'(x) = \frac{x \cdot f'(x) - 1 \cdot f(x)}{x^2} = \frac{x^2 \mathrm{e}^{2x}}{x^2} = \mathrm{e}^{2x} \ . \tag{1}$$

Par ailleurs, il existe un réel $c$ tel que, pour tout réel $x>0$,

$$g(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + c \ . \tag{2}$$

On a donc

$$f(x) = g(x)x = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} + cx \ . \tag{3}$$

La première condition reste bien vérifiée puisque :

$$\begin{aligned} xf'(x) - f(x) &= x\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{2x} + c\right) - \left(\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} + cx\right) && (4)\\ &= \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} + x^2\mathrm{e}^{2x} + cx - \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} + cx && (5)\\ &= \mathrm{e}^{2x} \ . && (6) \end{aligned}$$

Les fonctions $f$ vérifiant les deux conditions imposées sont les fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} + cx$$

où $c$ est un réel.

**UNIVERSITE DE MONS**

FACULTE POLYTECHNIQUE

*Examen d'admission - Algèbre et Analyse*

Groupe A - Mercredi 2 juillet 2014
Solutions

## Question 1 (ALG14-10)

Résoudre l'inégalité suivante :

$$\log_{f(x)}(3x-1) + \log_{g(x)}\sqrt{3x-1} \leq \ln(mx+1)$$

avec $m$ un paramètre réel, et

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = e^{\frac{x}{4x-2}}$$

Discutez en fonction de $m$.

## Question 2 (ANA14-17)

Déterminer la fonction $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
- $f'(x)$ est un polynôme de degré 3
- $f'(x)$ est une fonction impaire
- $f'(x)$ admet une racine en $x = 2$
- $f(\sqrt{2}) = -7$ et $f(4) = 133$

## Solutions

## Question 1 (ALG14-10)

Les conditions d'existence s'écrivent :

$$\begin{aligned}
&f(x) \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \Rightarrow x \neq 0\\
&g(x) \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \Rightarrow \frac{x}{4x-2} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0\\
&4x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}\\
&3x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}\\
&mx+1 > 0 \Rightarrow x > \frac{-1}{m}
\end{aligned}$$

Nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
&\frac{\ln(3x-1)}{\ln e^x} + \frac{\ln(3x-1)^{\frac{1}{2}}}{\ln e^{\frac{x}{4x-2}}} \leq \ln(mx+1)\\
&\frac{1}{x}\ln(3x-1) + \frac{4x-2}{x}\ln(3x-1)^{\frac{1}{2}} \leq \ln(mx+1)\\
&\ln(3x-1)^{\frac{1}{x}} + \ln(3x-1)^{\frac{1}{2}\frac{4x-2}{x}} \leq \ln(mx+1)\\
&\ln\left[(3x-1)^{\frac{1}{x}}(3x-1)^{\frac{1}{2}\frac{4x-2}{x}}\right] \leq \ln(mx+1)\\
&\ln(3x-1)^{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{4x-2}{x}\right)} \leq \ln(mx+1)\\
&\ln(3x-1)^2 \leq \ln(mx+1)\\
&(3x-1)^2 \leq mx+1\\
&9x^2+1-6x \leq mx+1\\
&9x^2-(m+6)x \leq 0\\
&x(9x-(m+6)) \leq 0
\end{aligned}$$

Les racines de $x(9x-(m+6))$ sont $x=0$ et $x=\frac{m+6}{9}$. Dès lors, les solutions de $x(9x-(m+6)) \leq 0$ sont données par :

$$\begin{aligned}
&x \in \left[0, \frac{m+6}{9}\right] \text{ si } \frac{m+6}{9} > 0 \text{ c.à.d. si } m > -6\\
&x \in \left[\frac{m+6}{9}, 0\right] \text{ si } \frac{m+6}{9} < 0 \text{ c.à.d. si } m < -6\\
&x = 0 \text{ si } m = -6
\end{aligned}$$

En tenant compte de la quatrième condition d'existence :

$$x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{m+6}{9}\right] \text{ si } \frac{m+6}{9} > \frac{1}{3} \text{ c.à.d. si } m > -3$$

En appliquant $m > -3$, la dernière condition d'existence, on trouve $x > \frac{1}{3}$ et elle est donc respectée. Si $m \leq -3$, l'inégalité ne possède pas de solution.

Finalement, en prenant aussi en compte la troisième condition, on trouve :

$$x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[ \cup \left]\frac{1}{2}, \frac{m+6}{9}\right] \text{ si } \frac{m+6}{9} > \frac{1}{2} \text{ c.à.d. si } m > \frac{-3}{2}$$
$$x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{m+6}{9}\right] \text{ si } \frac{m+6}{9} < \frac{1}{2} \text{ c.à.d. si } m < \frac{-3}{2}$$
$$x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[ \text{ si } \frac{m+6}{9} = \frac{1}{2} \text{ c.à.d. si } m > \frac{-3}{2}$$

En conclusion :

Si $m \leq -3$, il n'y a pas de solution.
Si $m > -\frac{3}{2}$ :

$$x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[ \cup \left]\frac{1}{2}, \frac{m+6}{9}\right]$$

Si $-3 < m < -\frac{3}{2}$ :

$$x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{m+6}{9}\right]$$

Si $m = -\frac{3}{2}$ :

$$x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$$

## Question 2 (ANA14-17)

On peut écrire $f'(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs, en sachant que l'imparité de $f'$ implique que 0 soit racine, et qu'il y ait symétrie pour les autres racines $x = 2$ et $x = -2$ :

$$f'(x) = a.x.(x-2).(x+2) = a.x.(x^2-4) = a.(x^3-4x)$$

où $a \in \mathbb{R}$. Et donc

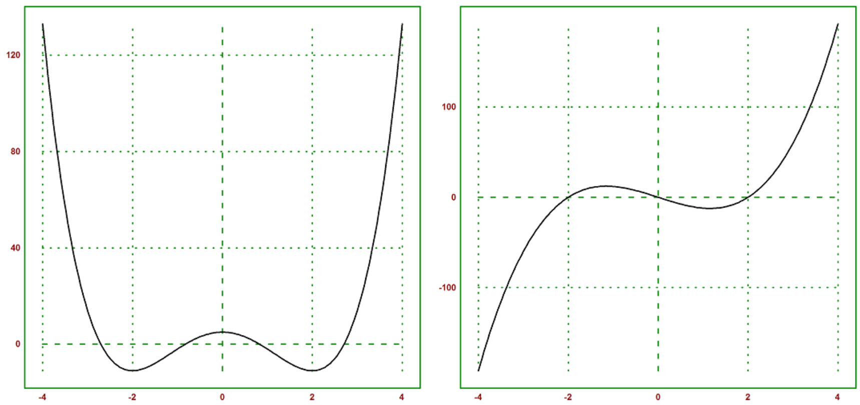
$$f(x) = a.\left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right) + c = \frac{a}{4}.x^4 - 2a.x^2 + c$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}) &= \frac{a}{4}.4 - 2a.2 + c & &= c - 3a = -7 \\ f(4) &= \frac{a}{4}.256 - 2a.16 + c & &= c + 32a = 133 \end{aligned}$$

On en déduit que $35a = 140$ et donc $a = 4$ ; et puis, $c = 5$.
Finalement,

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$$




Représentation de $f(x)$ et de sa dérivée première.

# UMONS Faculté Polytechnique
# Examen d'admission
# Algèbre - Analyse — Groupe B2
# Mardi 3 septembre 2013

## Question 1 (ALG13-3)

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, montrer que

$$(1+i)^6 = -8i \tag{1}$$

Tenant compte de la relation (1), déterminer une solution de l'équation

$$z^2 = -8i \tag{2}$$

Démontrer que cette équation possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.

Déduire également de la relation (1) une solution de l'équation

$$z^3 = -8i \tag{3}$$

## Question 2 (ANA13-8)

Soit la courbe $\mathcal{C}$ du plan, définie par la fonction $y = f(x) = 2x - \frac{\ln(x)}{x^2}$.

Considérons le domaine $\mathcal{D}$ situé entre la courbe $\mathcal{C}$, son asymptote oblique et les droites $x = 1$ et $x = n$ ($n$ entier positif non nul).

On demande :
– de calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ ;
– d'évaluer la valeur limite de l'aire quand $n$ tend vers l'infini.

# UMONS Faculté Polytechnique
# Examen d'admission
# Algèbre - Analyse — Groupe A2
# Vendredi 6 juillet 2013

## Question 1 (ALG13-17)

Pour dessiner une route agréable à la conduite, on souhaite utiliser 2 paraboles, en veillant à ce qu'elles se raccordent proprement [1]. Donner les expressions de ces 2 paraboles, en sachant que la première parabole possède deux zéros distincts : l'un en $x = 1$ et l'autre en $x = 3$ ; que la seconde parabole possède un sommet en $x = -3, y = 9$ ; et que les deux paraboles se coupent sur l'axe vertical et, en cet endroit, possèdent la même pente.

## Question 2 ANA13-17

Je désire construire un abri de jardin dont la surface au sol soit un trapèze isocèle ABCD. Comme je dispose de planches de bois de 4m de longueur, je décide que le trapèze aura trois côtés de 4m ; la grande base AD du trapèze sera plus grande. Je voudrais que mon abri de jardin ait une surface au sol la plus grande possible. Pouvez-vous m'aider ?

Demandes :

1. représenter graphiquement le trapèze ABCD en tenant compte des dimensions fixées ;
2. déterminer l'angle $\alpha = \widehat{BAD}$ formé par la grande base et un des côtés du trapèze de façon que la surface au sol de l'abri soit maximale.

1. Dans la pratique autoroutière, on utilise plutôt des tronçons du 3e degré, en imposant la continuité jusqu'à l'ordre 2.

# UMONS Faculté Polytechnique
# Examen d'admission

## Session de Juillet 2013
## Algèbre - Analyse

# Algèbre - Analyse Groupe A Mardi 2 juillet 2013

## Question ALG13-1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\sqrt{x^2+6x+8} < \sqrt{x^2+6x+11} - 1$$

## Solution question ALG13-1

<u>Conditions d'existence</u>

$$x^2+6x+8 \geq 0$$

Le discriminant vaut 4 et les racines sont $-4$ et $-2$. La condition d'existence s'écrit $x \notin ]-4,-2[$.

Si $x \notin ]-4,-2[$, la fonction $x^2+6x+11$ est positive (fonction précédente $+3$). Dès lors, la condition d'existence globale s'écrit :

$$x \notin ]-4,-2[$$

<u>Résolution</u>

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+6x+8}+1 &< \sqrt{x^2+6x+11} \\
x^2+6x+8+1+2\sqrt{x^2+6x+8} &< x^2+6x+11 \\
2\sqrt{x^2+6x+8} &< 2 \\
\sqrt{x^2+6x+8} &< 1 \\
x^2+6x+8 &< 1 \\
x^2+6x+7 &< 0
\end{aligned}$$

Le discriminant vaut 8 et les racines sont $-3-\sqrt{2}$ et $-3+\sqrt{2}$. La solution s'écrit donc :

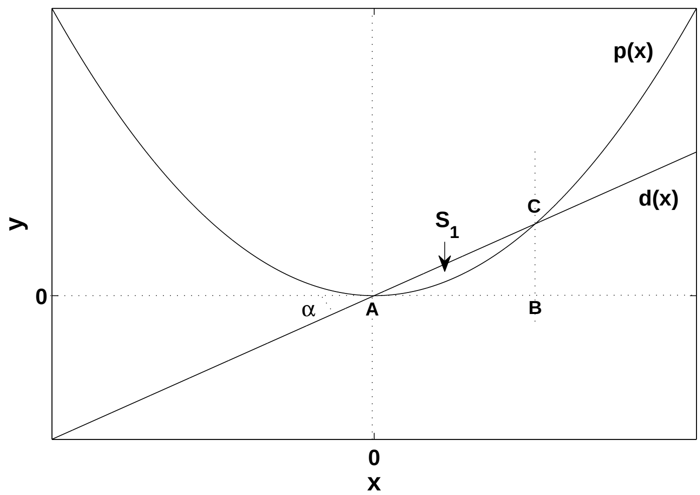
$$x \in ]-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}[$$

En tenant compte des conditions d'existence :

$$x \in ]-3-\sqrt{2},-4] \cup [-2,-3+\sqrt{2}[$$

## Question ANA13-10

Considérons une fonction parabolique dont le coefficient multipliant $x^2$ est une fonction linéaire du temps $t$. La parabole est donnée par la fonction $p(x) = tx^2$. Considérons également une droite $d(x)$ passant par le centre du repère et dont l'angle $\alpha$ (voir la figure ci-dessous) est aussi une fonction linéaire du temps : $\alpha = t$. Soit $S_1$, la surface délimitée par $p(x)$ et $d(x)$. On demande de déterminer l'évolution au cours du temps du rapport entre $S_1$ et la surface du triangle ABC (voir figure).




## Solution question ANA13-10

Les fonctions s'écrivent :

$$p(x) = tx^2$$
$$d(x) = \tan(t)x$$

Soit $(x_i, y_i)$ les coordonnées du point d'intersection C. En écrivant que $p(x_i) = d(x_i)$ et en ne considérant pas la solution $x_i = 0$, on obtient :

$$x_i = \frac{\tan(t)}{t}$$

Dès lors :

$$y_i = d(x_i) = \frac{\tan^2(t)}{t}$$

La surface du trangle ABC s'écrit alors :

$$S_{\text{ABC}}(t) = \frac{x_i y_i}{2} = \frac{1}{2}\frac{\tan^3(t)}{t^2}$$

La surface $S_1(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int_0^{x_i} [d(x) - p(x)] \, \mathrm{d}x \\ &= \tan(t) \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\tan(t)}{t}} - t \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\tan(t)}{t}} \\ &= \frac{\tan(t)}{2} \left(\frac{\tan(t)}{t}\right)^2 - \frac{t}{3} \left(\frac{\tan(t)}{t}\right)^3 \\ &= \frac{1}{6} \frac{\tan^3(t)}{t^2} \end{aligned}$$

Le rapport $\frac{S_1(t)}{S_{\mathrm{ABC}}(t)}$ s'écrit finalement :

$$\frac{S_1(t)}{S_{\mathrm{ABC}}(t)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

Il s'agit donc d'une constante.

# Algèbre - Analyse Groupe B Mercredi 3 juillet 2013

## Question ALG13.6

La droite $d_1$ d'équation $x - 2y + 10 = 0$ rencontre le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 100$ au point $B$ dans le premier quadrant. Une droite passant par $B$, perpendiculaire à la droite $d_1$ coupe l'axe des $y$ au point $P$ de coordonnées $(0, t)$. Déterminer la valeur de $t$.

## Solution Question ALG13.6

$$x - 2y + 10 = 0$$
$$x^2 + y^2 = 100$$

On arrive à une solution pour le point $B$ en tirant $x$ de la première équation et en substituant dans la seconde :

$$(2y - 10)^2 + y^2 = 100$$

Après développement, on obtient :

$$5y^2 - 40y = 100$$
$$y(5y - 40) = 0$$

On a
- soit $y = 0$ et $x = -10$ qui n'est pas dans le premier quadrant
- soit $y = 8$ et $x = 6$, qui correspond au point $B$.

  On obtient ainsi que $B$ a pour coordonnées $(6, 8)$.

La deuxième droite $d_2$ passe par $B$, et est perpendiculaire à la droite $d_1$, et coupe l'axe des $y$ au point $P(0, t)$.

Equation de $d_1$ :

$$y = 1/2\, x + 5$$

Equation de $d_2$ :

$$y = ax + b$$

$d_1$ est perpendiculaire à $d_2$ donc :

$$a.1/2 = -1$$

Et donc :

$$a = -2$$

Alors, l'équation de $d_2$ est :

$$y = -2x + b$$

$B$ appartient à $d_2$, d'où : $8 = -12 + b$ et $b = 20$ La droite $d_2$ qui passe par $B$ et est perpendiculaire à $d_1$ coupe l'axe des y au point $(0, 20)$.

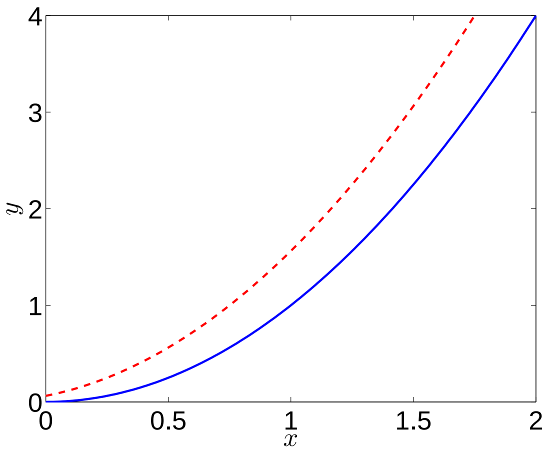
## Question 2 ANA13.15

La pièce métallique à fabriquer est le volume engendré par la rotation autour de l'axe $Oy$ de l'aire comprise entre les courbes $y = x^2$ et $y = (x + 1/4)^2$ pour $x \geq 0$ et $y \leq 4$.

- Représentez graphiquement l'aire en question.
- Calculez le volume de métal nécessaire pour fabriquer la pièce.

## Solution Question ANA13.15

1. L'aire est comprise entre les deux courbes représentées ci-dessous :




2. Le volume de métal est donné par :

$$V = \pi \int_0^4 R^2(y)\mathrm{d}y - \pi \int_{1/16}^4 r^2(y)\mathrm{d}y$$

- $R(y) = ?$ $\quad y = x^2 \to x = \sqrt{y}$
- $r(y) = ?$ $\quad y = (x + 1/4)^2 \to x = \sqrt{y} - 1/4$

$$\pi \int_0^4 R^2(y)\mathrm{d}y = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 \mathrm{d}y = \pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$$

$$\begin{aligned} \pi \int_{1/16}^4 r^2(y)\mathrm{d}y = \pi \int_{1/16}^4 (\sqrt{y} - 1/4)^2 \mathrm{d}y &= \pi \int_{1/16}^4 (y - 1/2\sqrt{y} + 1/16)\mathrm{d}y \\ &= \pi \left[\frac{y^2}{2} - 1/3 y^{3/2} + 1/16 y\right]_{1/16}^4 = 5{,}5827\pi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V = 2{,}4173\pi$$

# Algèbre - Analyse    Groupe C    Vendredi 5 juillet 2013

## Question ALG13-10

Soient $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes alignés avec le point de coordonnées $(0,0)$ dans le plan complexe. Soit un troisième nombre complexe $m$ situé sur la bissectrice des axes réel et imaginaire dans le premier quadrant. Ces trois nombres sont tels que :

$$\begin{aligned} z_1 + 3 - i &= m \\ mz_2 - 5i &= 3 \end{aligned}$$

On demande de calculer la partie réelle de $m$.

## Solution question AL13-10

Posons $m = a + ib$. Puisque $m$ appartient à la bissectrice des axes réel et imaginaire du premier quadrant :

$$b = a \text{ et } m = a + ia$$

Dès lors :

$$z_1 + 3 - i = m = a + ia \Rightarrow z_1 = (a-3) + i(a+1)$$

$$mz_2 - 5i = 3 \Rightarrow z_2 = \frac{3+5i}{a+ia} = \frac{(3+5i)(a-ia)}{2a^2} = \frac{1}{2a^2}\left[(3a+5a) + (5a-3a)i\right]$$

Puisque $z_1$ et $z_2$ sont alignés avec $(0,0)$ dans le plan complexe :

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{a-3} = \frac{5a-3a}{3a+5a} &= \frac{1}{4} \\ a+1 &= \frac{1}{4}(a-3) \\ \frac{3}{4}a &= -\frac{7}{4} \end{aligned}$$

et finalement, la partie réelle de $m$ vaut :

$$a = \frac{-7}{3}$$

## Question AN13-11

Calculer la primitive suivante :

$$I = \int \frac{x \,\mathrm{d}x}{1 + \cos x}$$

Conseil : poser $y = \frac{x}{2}$.

## Solution question AN13-11

En posant $y = \frac{x}{2}$, l'intégrale à calculer devient :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4y}{1 + \cos 2y} \,\mathrm{d}y \\ &= \int \frac{4y}{2\cos^2 y} \,\mathrm{d}y \\ &= 2 \int \frac{y}{\cos^2 y} \,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

En intégrant par parties ($u = y$ et $v' = \frac{1}{\cos^2 y}$), on trouve :

$$I = 2 \left( y \tan y - \int \tan y \,\mathrm{d}y \right)$$

Puisque :

$$\int \tan y \,\mathrm{d}y = \int \frac{\sin y}{\cos y} \,\mathrm{d}y = \int -\frac{\mathrm{d}(\cos y)}{\cos y} = -\ln\left(|\cos y|\right)$$

l'intégrale devient :

$$I = 2\left(y \tan y + \ln\left(|\cos y|\right)\right)$$

Finalement :

$$I = x \tan \frac{x}{2} + 2 \ln \left( \left| \cos \frac{x}{2} \right| \right) + \mathrm{Cte}$$

## Question subsidiaire ALG13-16

Rappelons la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(a+b)^n =& a^n + na^{n-1}\,b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}\,b^2 + ...\\ & ... + \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array}\right) a^{n-i}\,b^i + ... + b^n\end{aligned}$$

$\left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array}\right)$ est une notation pour $\frac{n!}{(n-i)!\,i!}$.

1. Calculez le terme qui ne dépend pas de $x$ dans le développement de $\left(x - \frac{1}{x^3}\right)^{28}$.
2. Calculez le terme qui ne dépend pas de $x$ dans le développement de $\left(1 + \frac{1}{x^5}\right)^7 (2-x)^{10}$.

## Solution question subsidiaire ALG13-16

1. Le terme général du développement s'écrit

$$\left(\begin{array}{c} 28 \\ i \end{array}\right) x^{28-i} \left(\frac{-1}{x^3}\right)^i$$

Ce terme ne dépend pas de $x$ si $28 - i = 3i$, c'est-à-dire si $i = 7$. Il vaut :

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{c} 28 \\ 7 \end{array}\right) (-1)^7 = -1 \times \frac{28!}{21!\,7!} &= -\frac{28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}\\ &= -90 \times 26 \times 23 \times 22 = -1.18404\,10^6\end{aligned}$$

2. Le terme général du développement de $\left(1 + \frac{1}{x^5}\right)^7$ s'écrit :

$$\left(\begin{array}{c} 7 \\ i \end{array}\right) \left(\frac{1}{x^5}\right)^i$$

Le terme général du développement de $(2-x)^{10}$ s'écrit :

$$\left(\begin{array}{c} 10 \\ j \end{array}\right) 2^{10-j} (-x)^j$$

En effectuant le produit, on obtient des termes indépendants de $x$ si et seulement si $j = 5i$ avec $i = 0...7$ et $j = 0...10$. Les différentes possibilités sont les suivantes :

$$\begin{aligned}i = 0, j = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{c} 7 \\ 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 10 \\ 0 \end{array}\right) 2^{10-0}(-1)^0 &= 2^{10}\\ i = 1, j = 5 \Rightarrow \left(\begin{array}{c} 7 \\ 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 10 \\ 5 \end{array}\right) 2^{10-5}(-1)^5 &= -7\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}\,2^5\\ &= -49 \times 36 \times 32\\ i = 2, j = 10 \Rightarrow \left(\begin{array}{c} 7 \\ 2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 10 \\ 10 \end{array}\right) 2^{10-10}(-1)^{10} &= \frac{7 \times 6}{2} = 21\end{aligned}$$

Finalement, le terme indépendant de $x$ s'écrit :

$$2^{10} - (49 \times 36 \times 32) + 21 = -55403$$

# Algèbre - Analyse Groupe D Mercredi 3 juillet 2013

## Question ALG13.20

Résoudre

$$2\ln^3 x + \ln x^2 = \ln^2 x^{\sqrt{5}}$$

## Solution Question ALG13.20

$$\begin{aligned} & 2\ln^3 x + \ln x^2 = \ln^2 x^{\sqrt{5}} \\ \Leftrightarrow\ & 2\ln^3 x + \ln x^2 = (\sqrt{5}\ln x)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2\ln^3 x - 5\ln^2 x + \ln x^2 = 0 \end{aligned}$$

Posons $Y = \ln x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ & 2Y^3 - 5Y^2 + 2Y = 0 \\ \Leftrightarrow\ & Y(2Y^2 - 5Y + 2) = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 25 - 4.4 = 9$$

$$Y_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = 1/2 \ \text{ et } \ 2$$

$$\Rightarrow\ Y(Y-2)(Y-1/2) = 0$$

Les solutions sont donc :

- $\ln x = 0 \to x = 1$
- $\ln x = 2 \to x = e^2$
- $\ln x = 1/2 \to x = e^{1/2}$

$$\Rightarrow\ x = \left\{1; e^2; e^{1/2}\right\}$$

## Question ANA13.5

Calculez les intégrales suivantes :

$$I = \int \frac{1+2x-3x^2}{x-x^3}\,\mathrm{d}x$$

$$J = \int \frac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)}\,\mathrm{d}x$$

## Solution Question ANA13.5

Pour calculer $I$, nous remarquons que :

$$\frac{1+2x-3x^2}{x-x^3} = \frac{(1-x)(3x+1)}{x(1-x)(1+x)} = \frac{(3x+1)}{x(1+x)} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}$$

d'où :

$$I = \int \frac{1+2x-3x^2}{x-x^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{2}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(|x|(x+1)^2) + A, \quad A \in \Re$$

Pour $J$, on procède au changement de variable : $u = \ln x$

$$J = \int \frac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u}{(1-u^2)}\,\mathrm{d}u$$

En posant $v = 1-u^2$, on a $\mathrm{d}v = -2u\mathrm{d}u$, d'où

$$\begin{aligned}\int \frac{u}{(1-u^2)}\,\mathrm{d}u &= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}v}{v} = \ln \frac{1}{\sqrt{|1-u^2|}} + B \\ &= \ln \frac{1}{\sqrt{|1-\ln^2 x|}} + B, \quad B \in \Re\end{aligned}$$

# Algèbre - Analyse    Groupe E    Jeudi 4 juillet 2013

## Question ALG13.08

Une bibliothécaire souhaite acheter des livres de deux types : $x$ livres de physique à 10 euros et $y$ livres d'algèbre à 5 euros.
Elle souhaite :
– acheter au moins six livres d'algèbre ;
– acheter au moins deux fois plus de livres de physique que de livres d'algèbre ;
– ne pas dépenser plus de 200 euros.

On demande de résoudre graphiquement le problème, c'est-à-dire de représenter l'ensemble des solutions $(x, y)$ possibles.
Répondez en particulier aux questions suivantes :

1. si on décide d'acheter 21 livres, quelles sont les différentes possibilités d'achat ?
2. si on décide d'acheter 25 livres, quelles sont les différentes possibilités d'achat ?
3. quel est le nombre maximum de livres pouvant être achetés ?

## Solution ALG13.08

Posons :
- $x$, le nombre de livres de physique ;
- $y$, le nombre de livres d'algèbre.

Les contraintes peuvent alors s'exprimer par :
- C1 : $y \geq 6$
- C2 : $x \geq 2y$
- C3 : $10x + 5y \leq 200 \to 2x + y \leq 40$

Les différentes solutions possibles ($x$ et $y$ entiers !) sont pointées sur la figure 1 (cf. les symboles 'o').

En particulier :

1. Cas où on décide d'acheter 21 livres.
   Cette situation conduit à la contrainte $x + y = 21 \to$ Le tracé de cette contrainte sur le graphique donne les solutions suivantes :
   $$x = 14 \text{ et } y = 7$$
   $$\text{ou } x = 15 \text{ et } y = 6$$
2. Cas où on veut acheter 25 livres.
   Cette situation conduit à la contrainte $x + y = 25 \to$ Le tracé de cette contrainte sur le graphique montre qu'il n'est pas possible de respecter cette contrainte supplémentaire.

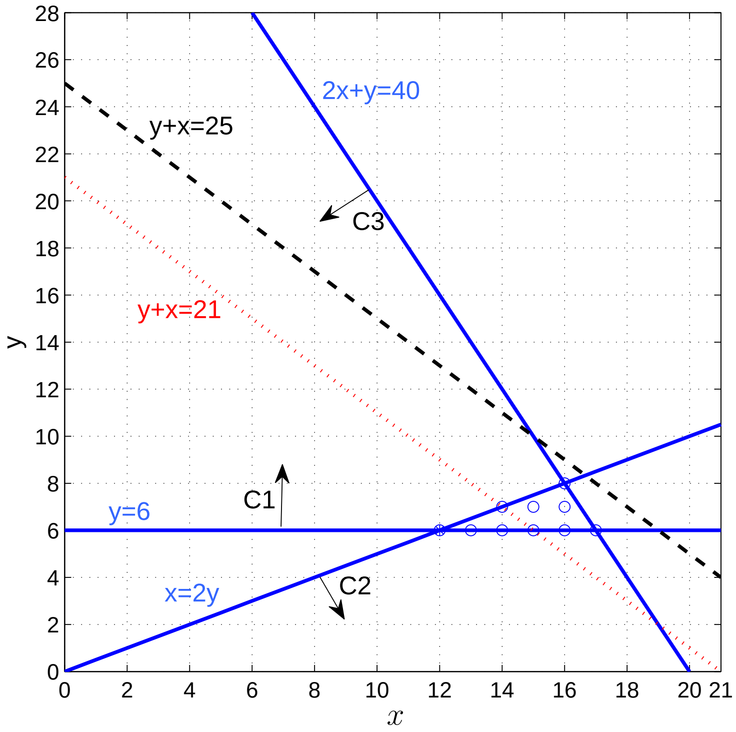



Figure 1 – Solutions admissibles

3. Le nombre maximum de livres qui peuvent être achetés est de 24 (16 livres de physique et 8 livres d'algèbre)

## Question ANA13.21

Considérons
- le rectangle défini par les points $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,\beta)$ et $C(0,\beta)$ ;
- le point $\alpha(\frac{3}{4},1)$ ;
- la fonction $g(x) = ax^2 + bx + c$ passant par les points $O$ et $\alpha$ et présentant une pente égale à 2 au point $\alpha$.

Déterminez les coordonnées du point $B$ de sorte que la courbe $g(x)$ divise le rectangle $OABC$ en deux parties d'aires égales.

## Solution question ANA13.21

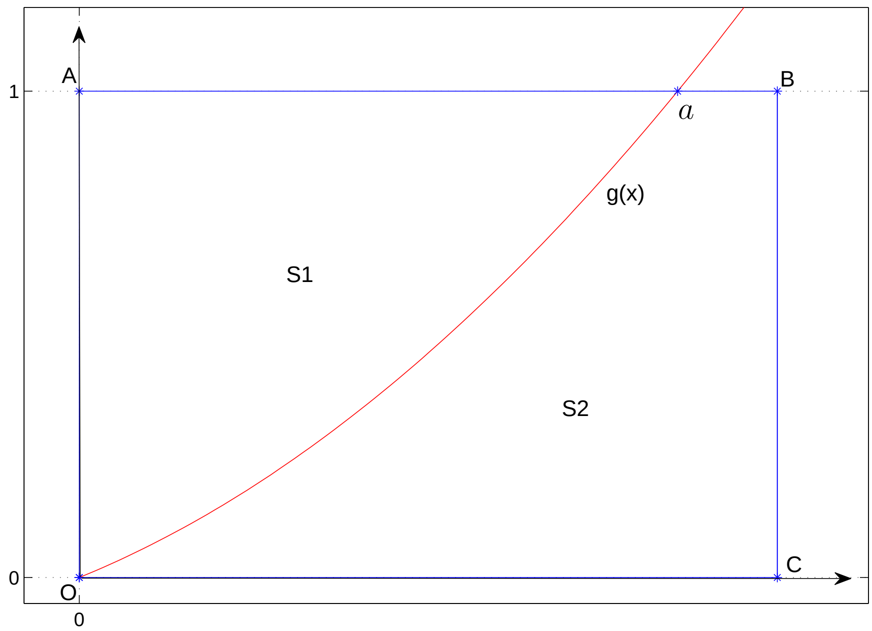



FIGURE 2 – Représentation graphique du problème

1) Obtenir les paramètres définissant $g(x)$.

On a :

$$
\begin{aligned}
g(0) = 0 \quad &\rightarrow \quad c = 0 \\
g(\frac{3}{4}) = 1 \quad &\rightarrow \quad a\left(\frac{3}{4}\right)^2 + b\frac{3}{4} = 1 \qquad (1) \\
g'(\frac{3}{4}) = 2 \quad &\rightarrow \quad 2a\left(\frac{3}{4}\right) + b = 2 \qquad (2) \\
& \qquad (3)
\end{aligned}
$$

En utilisant (1) et (2), on obtient $a = \frac{8}{9}$ et $b = \frac{2}{3}$.

$\Rightarrow g(x) = \frac{8}{9}x^2 + \frac{2}{3}x$

2) Déterminer $\beta$, l'abscisse des points $B$ et $C$.
On peut écrire :

$$
\begin{aligned}
\text{Aire de S2} \quad &= \quad \frac{1}{2} \text{ de l'aire du rectangle } OABC \\
\int_0^{\alpha} g(x)\mathrm{d}x + \int_{\alpha}^{\beta} 1\,\mathrm{d}x \quad &= \quad \frac{1}{2}\int_0^{\beta} 1\,\mathrm{d}x \\
\left[\frac{8}{9}\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{3}{4}} + 1\left(\beta - \frac{3}{4}\right) \quad &= \quad \frac{1}{2}1.\beta
\end{aligned}
$$

$$
\rightarrow -\frac{\beta}{2} = \left(\frac{8}{9}\frac{(3/4)^3}{3} + \frac{2}{3}\frac{(3/4)^2}{2}\right) - \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{7}{8}
$$

# Algèbre - Analyse    Groupe F    Jeudi 4 juillet 2013

## Question ALG13.15

On donne l'équation du $4^{\text{ème}}$ degré suivante :

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0 \tag{4}$$

1) Diviser (4) par $x^2$ et montrer qu'en posant $y = x + \frac{1}{x}$, on peut ramener la résolution de (4) à la résolution d'une équation du second degré en y.

2) Rechercher toutes les solutions de l'équation (4).

## Solution ALG13.15

1) Divisons (4) par $x^2$ (on suppose $x \neq 0$ ; $x = 0$ n'est pas solution de (4))

$$x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \tag{5}$$

On observe que

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= y \\ x^2 + \frac{1}{x^2} &\neq y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \end{aligned}$$

(5) devient

$$y^2 - 2 + y - 4 = 0 \rightarrow y^2 + y - 6 = 0$$

Résoudre (4) revient donc à résoudre

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y &=& x + \frac{1}{x} \\ y^2 + y - 6 &=& 0 \end{array} \right. \tag{6}$$

2) On résoud le système (6)

$$\begin{aligned} y^2 + y - 6 = 0 \quad &\rightarrow \quad y = \frac{-1 + \sqrt{1 + 24}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ -3 \end{array} \right. \\ y = x + \frac{1}{x} \quad &\rightarrow \quad xy = x^2 + 1 \rightarrow x^2 - xy + 1 = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Si $y = 2$, (4) devient

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ (racine double)}$$

Si $y = -3$, (4) devient

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$\Rightarrow$ Solutions de (1) $= \left[1, -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}\right]$

## Question ANA13.19

Déterminer l'expression la plus simple d'une fonction paire possédant un zéro en $x = 1$ et une asymptote verticale en $x = -3$. En faire une représentation sommaire.
Faire de même, pour une fonction impaire.

## Solution question ANA13.19

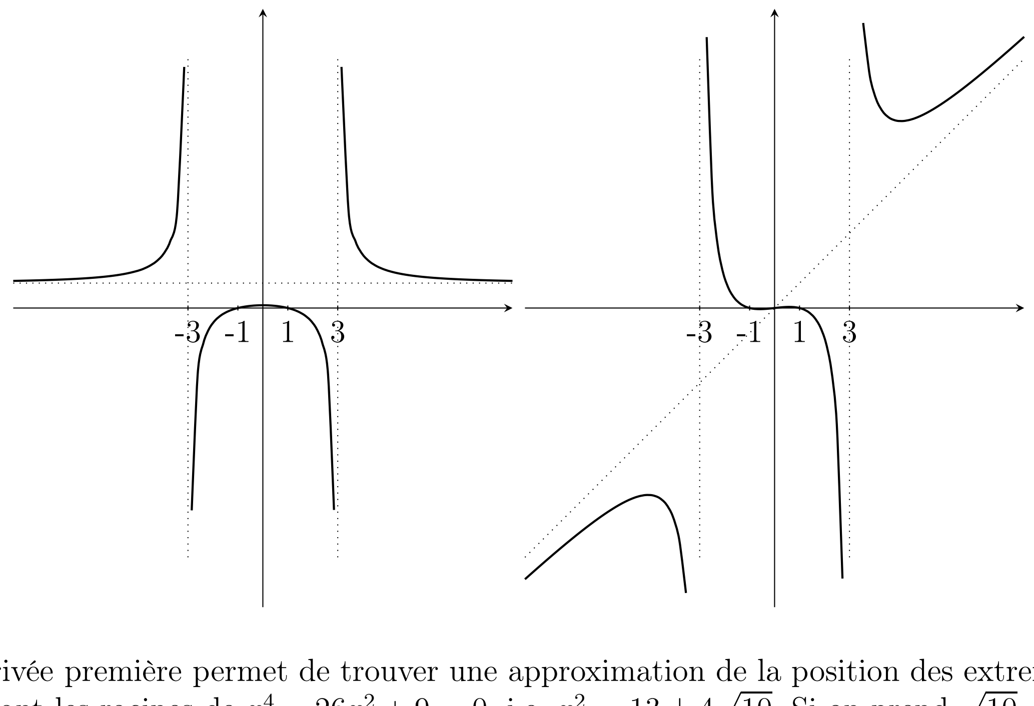
Pour le premier cas, on a que

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+3)}$$

qui possède une asymptote horizontale en $y = 1$.
Pour le deuxième cas, on a que

$$f(x) = \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+3)}$$

qui possède une asymptote oblique en $y = x$.




La dérivée première permet de trouver une approximation de la position des extrema, en cherchant les racines de $x^4 - 26x^2 + 9 = 0$, i.e. $x^2 = 13 \pm 4\sqrt{10}$. Si on prend $\sqrt{10} \sim 3.15$, on a $x^2 = 25.6$ ou $x^2 = 0.4$. Et donc, $x \sim \pm 5$ ou $x \sim \pm 0.6$.
On peut déterminer la position du point d'inflexion sans utiliser la dérvée seconde. Il est évidemment en $x = 0$.

# UMONS Faculté Polytechnique
# Examen d'admission 2012 : questions d'analyse

## Question série A (ANA12.1)

Etudiez la fonction

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - x^2)^2}} \qquad (a > 0)$$

et faites-en une représentation graphique soignée.

## Question série B (ANA12.12)

Soit la fonction réelle

$$f(x) \;=\; \min\left(|x-2|, x^2 + 8x + 16\right)$$

Calculez l'intégrale définie suivante

$$\int_{-10}^{10} f(x)\; dx$$

## Question série C (ANA12.9)

Un coureur effectue une course de 20 km avec une vitesse constante sur les dix premiers kilomètres et une vitesse décroissante exponentiellement sur le reste de la distance. La vitesse $v(z)$ ($z$ est la distance parcourue) s'exprime de la manière suivante (les unités utilisées sont le km pour les distances et le km/h pour la vitesse) :

$$v(z) = 10 \text{ pour } 0 \leq z \leq 10$$
$$v(z) = 10\, e^{-\frac{z-10}{20}} \text{ pour } 10 < z \leq 20$$

On demande de calculer la fonction $v_m(z)$, définie comme la vitesse moyenne effectuée par le coureur sur les 2 km précédents. Pour démarrer votre calcul, exprimez le fait que $v_m(z)$ est égale à la moyenne de $v(z')$ entre $z' = z - 2$ et $z' = z$, c'est-à-dire :

$$v_m(z) = \frac{1}{2} \int_{z-2}^{z} v(z')\, \mathrm{d}z'$$

## Question série D (ANA12.18) sans solution

– Etudiez la fonction
$$f(x) = \frac{3}{4}x^4 + x^3 - 3x^2$$
et faites-en une représentation graphique soignée.
– Utilisez l'analyse précédente pour étudier l'existence et le signe des racines de l'équation :
$$\frac{3}{4}x^4 + x^3 - 3x^2 - m = 0$$
où $m$ est un paramètre qui peut prendre n'importe quelle valeur réelle.

## Question série E (ANA12.20)

Soit la fonction $f(x) = (a + x)\, e^x$ avec $a$, un paramètre réel tel que $a > 0$.

1. Etudiez $f(x)$ et faites en une représentation soignée.
2. Ecrivez l'ensemble des points $(x, y)$ où la fonction peut avoir un extremum lorsque le paramètre $a$ varie.

## Question série F (ANA12.23)

Etudiez la fonction
$$f(x) = \frac{1 + \ln(|2x|)}{2x})$$
et donnez-en une représentation graphique soignée.

## Question série B2 (ANA12.13)

Etudiez la fonction
$$y(x) = x + e^{-1/x}$$
et faites-en une représentation graphique soignée.

## Solution analyse série A (ANA12.1)

**Domaine de définition :** $x^2 - a^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R}\ \{-a, a\}$

**Parité :** $y(x)$ est une fonction paire ($y(x) = y(-x)$), on peut délimiter l'étude dans l'intervalle $[0, a[\cup]a, +\infty[$

**Limites**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a^-} y(x) &= +\infty \qquad \text{(asymptote verticale)} \\
\lim_{x \to a^+} y(x) &= +\infty \\
\lim_{x \to +\infty} y(x) &= 0 \qquad \text{(asymptote horizontale)}
\end{aligned}$$

**Racines :** La fonction $y(x)$ est toujours positive dans l'intervalle de définition.

**Dérivée première**

- Si $x < a$, $y(x) = \frac{1}{a^2 - x^2}$

$$y'(x) = -\frac{-2x}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{2x}{(a^2 - x^2)^2}$$

- Si $x > a$, $y(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$

$$y'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - a^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} y'(x) &= 0 \qquad \text{(extremum — pente horizontale)} \\
\lim_{x \to a^-} y'(x) &= +\infty \\
\lim_{x \to a^+} y'(x) &= -\infty \\
\lim_{x \to +\infty} y'(x) &= 0
\end{aligned}$$

| $x$ | $0$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'(x)$ | $0$ | $+$ | ${}^{+\infty}/_{-\infty}$ | $-$ | $0$ |

**Dérivée seconde**

– Si $x < a$,

$$y''(x) = \frac{2}{(a^2 - x^2)^2} + \frac{8x^2}{(a^2 - x^2)^3} = \frac{6x^2 + 2a^2}{(a^2 - x^2)^3}$$

– Si $x > a$,

$$y''(x) = \frac{-2}{(x^2 - a^2)^2} + \frac{8x^2}{(x^2 - a^2)^3} = \frac{6x^2 + 2a^2}{(x^2 - a^2)^3}$$

| $x$ | $0$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''(x)$ | $\frac{2}{a^3}$ | $+$ | $/$ | $+$ | $0$ |

**En récapitulatif,**

| $x$ | $0$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'(x)$ | $0$ | $+$ | $^{+\infty}/_{-\infty}$ | $-$ | $0$ |
| $y''(x)$ | $\frac{2}{a^3}$ | $+$ | $/$ | $+$ | $0$ |
| $y(x)$ | $\frac{1}{a^2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ |
| | | $\bigcup$ | | $\bigcup$ | |

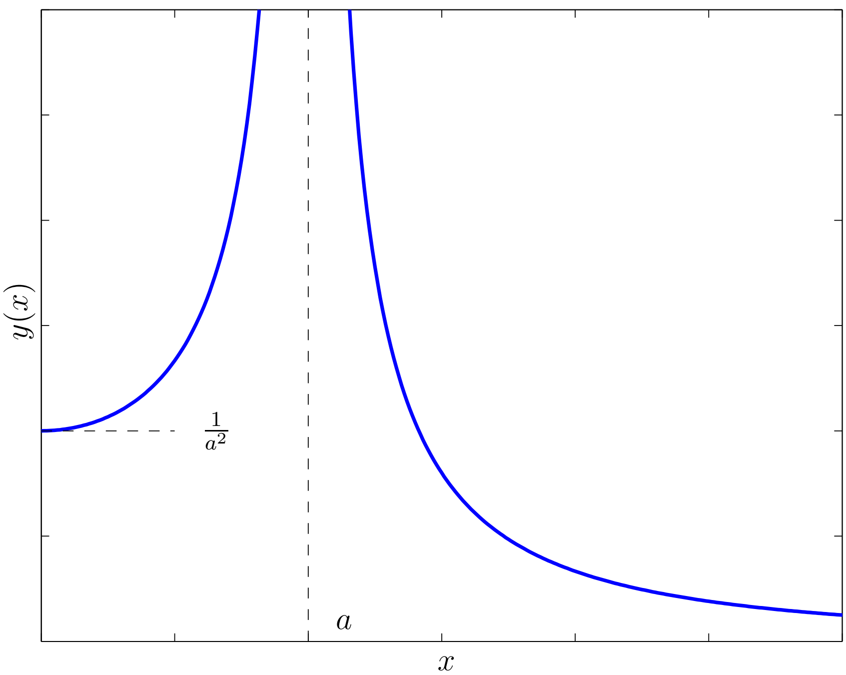
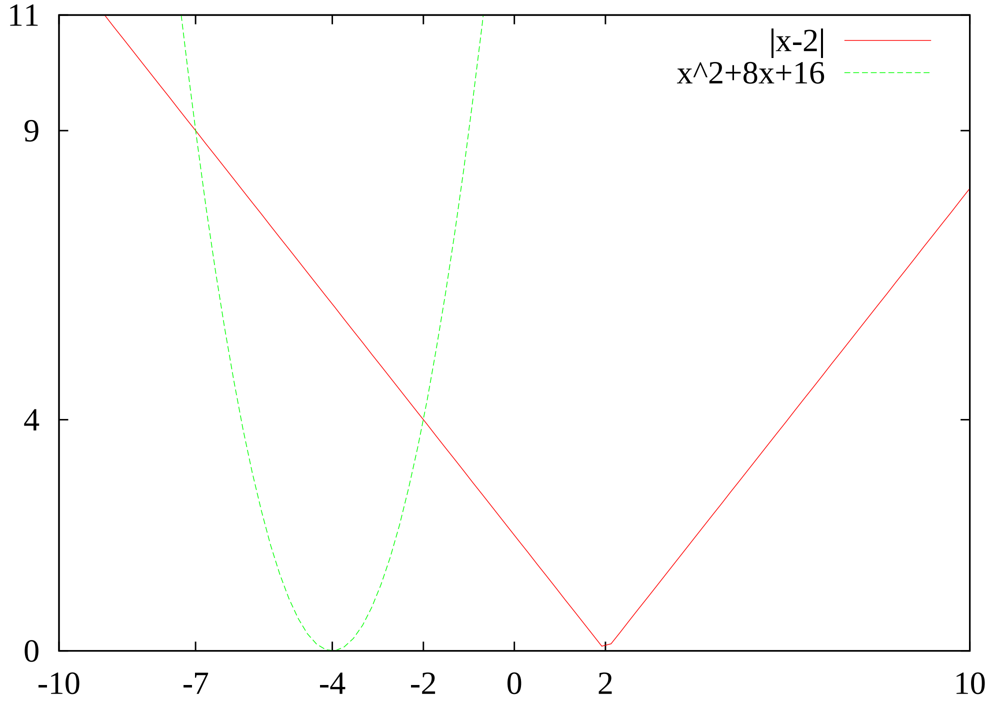



Figure 1 – Tracé de la fonction

## Solution analyse série B (ANA12.12)

En représentant les courbes $|x-2|$ et $x^2+8x+16$, nous remarquons des valeurs particulières pour $x$, c'est-à-dire : -7,-2 et 2.




La fonction $f(x)$ peut donc s'écrire comme suit :

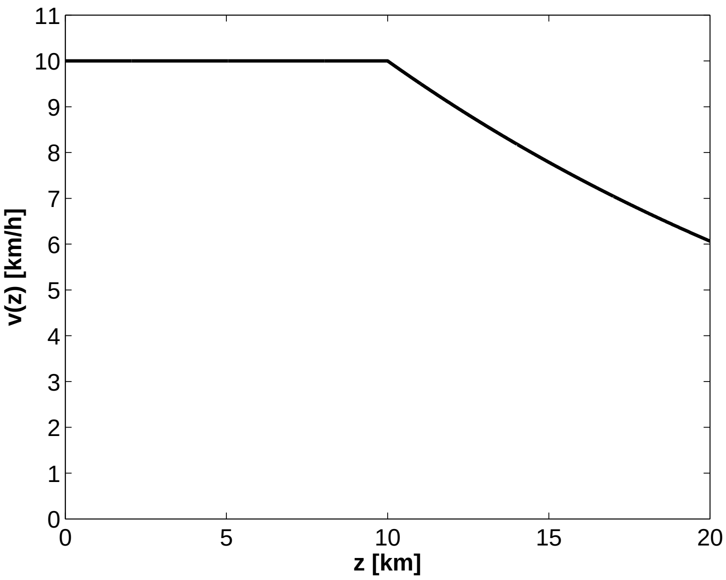
$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & -10 \leq x \leq -7 \\ x^2 + 8x + 16 & -7 \leq x \leq -2 \\ 2 - x & -2 \leq x \leq 2 \\ x - 2 & 2 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Nous calculons ensuite l'ntégrale.

$$
\begin{aligned}
\int_{-10}^{10} f(x)\ dx &= \int_{-10}^{-7} 2-x\ dx + \int_{-7}^{-2} x^2+8x+16\ dx + \int_{-2}^{2} 2-x\ dx + \int_{2}^{10} x-2\ dx \\
&= \left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_{-10}^{-7} + \left[\frac{x^3}{3}+4x^2+16x\right]_{-7}^{-2} + \left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{2}^{10} \\
&= (-\frac{77}{2}+70)+(-\frac{56}{3}+\frac{91}{3})+(2+6)+(30+2) \\
&= \frac{499}{6}
\end{aligned}
$$

## Solution analyse série C (AN12.9)

La fonction $v(z)$ est représentée ci-dessous.




La fonction $v_m(z)$ est définie entre $z = 2$ et $z = 20$. Afin de la calculer, trois cas sont à considérer :

1. $\underline{2 < z \leq 10}$

   Dans ce cas :
$$v_m(z) = \frac{1}{2}\int_{z-2}^{z} 10\,\mathrm{d}z' = 10$$

2. $\underline{10 < z \leq 12}$

Dans ce cas :

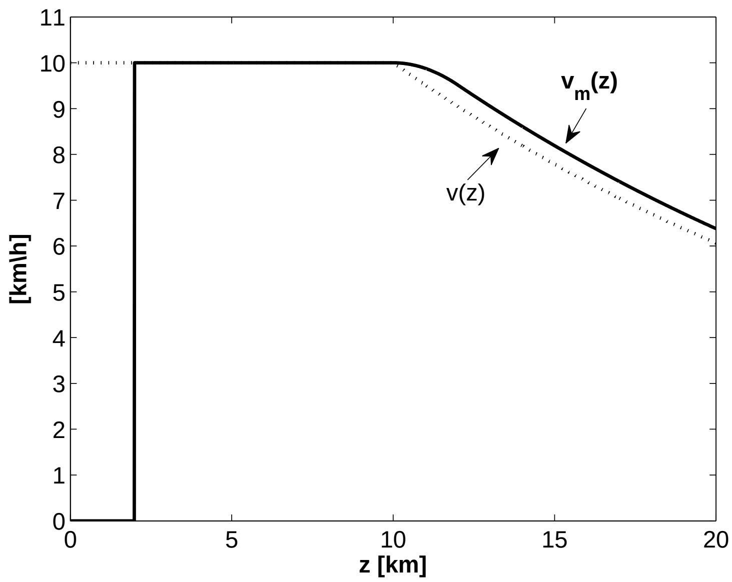
$$
\begin{aligned}
v_m(z) &= \frac{1}{2}\int_{z-2}^{10} 10\,\mathrm{d}z' + \frac{1}{2}\int_{10}^{z} 10\,e^{-\frac{z'-10}{20}}\,\mathrm{d}z' \\
&= 5(10 - z + 2) + 5 \times (-20)[e^{-\frac{z'-10}{20}}]_{10}^{z} \\
&= 60 - 5z - 100\left(e^{-\frac{z-10}{20}} - 1\right) \\
&= 60 - 5z + 100\left(1 - e^{-\frac{z-10}{20}}\right)
\end{aligned}
$$

3. $\underline{12 < z \leq 20}$

   Dans ce cas :

$$\begin{aligned} v_m(z) &= \frac{1}{2}\int_{z-2}^{z} 10\, e^{-\frac{z'-10}{20}}\, \mathrm{d}z' \\ &= 5 \times (-20)[e^{-\frac{z'-10}{20}}]_{z-2}^{z} \\ &= -100\left(e^{-\frac{z-10}{20}} - e^{-\frac{z-12}{20}}\right) \\ &= 100\, e^{-\frac{z-10}{20}}\left(e^{\frac{1}{10}} - 1\right) \end{aligned}$$

La fonction $v_m(t)$ est représentée ci-dessous (il n'est pas demandé aux candidats de la dessiner). Rappelons que $v_m(z)$ n'est pas définie entre $z = 0$ et $z = 2$.




## Solution analyse série E (AN12.20)

1.

$$f(x) = (a + x)\, e^{x}$$

   Domaine : $\mathbb{R}$

   Parité : $f(x)$ n'est ni paire ni impaire.

   Racines : une racine en $x = -a$.

| | $-a$ | | |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | - | 0 | + |

<u>Signe</u>. Le tableau de signe est le suivant :
<u>Asymptotes verticales</u> : pas d'asymptote verticale.

<u>Asymptotes obliques</u> :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a+x}{x}\, e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{a+x}{x}\, e^x = 0$$

$f(x)$ ne présente pas d'asymptote oblique.

<u>Asymptotes horizontales</u> :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (a+x)\, e^x = -\infty \cdot 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{a+x}{e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{e^{-x}} = 0$$

$f(x)$ possède une asymptote horizontale en $y = 0$.

<u>Dérivée</u> :

$$f'(x) = e^x(a+1+x)$$

Le tableau de signe est présenté ci-dessous :

| | $-1-a$ | | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | 0 | + |

<u>Dérivée seconde</u> :

$$f''(x) = e^x(a+2+x)$$

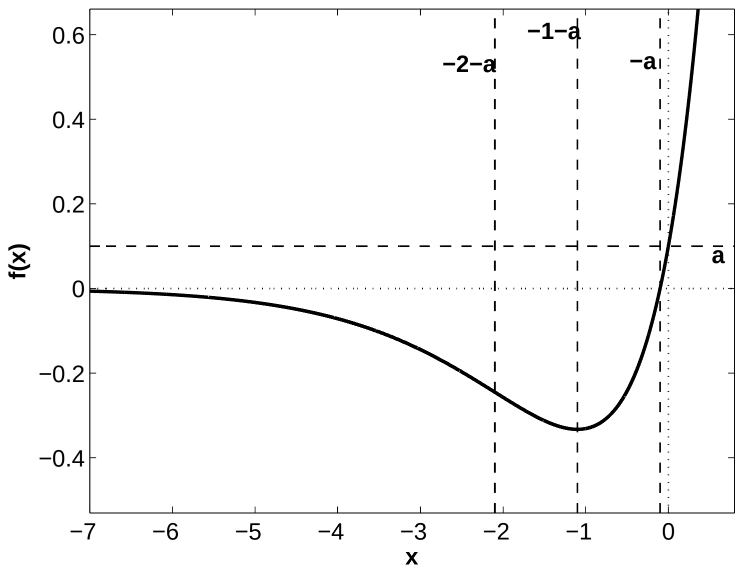
Le tableau de signe est présenté ci-dessous :

| | $-2-a$ | | |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | - | 0 | + |

Tableau final

| | | $-2-a$ | | $-1-a$ | | $-a$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | - | - | - | - | - | 0 | $+$ |
| $f'(x)$ | - | - | - | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f''(x)$ | - | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |

Graphe ($a = \frac{1}{10}$)




2.

$$f'(x) = e^x(1 + a + x)$$

Cette fonction s'annule en $x = -1 - a$ et

$$f(x = -1 - a) = -e^{-1-a}$$

L'ensemble des points $(x, y)$ où la fonction peut avoir un extremum lorsque le paramètre $a$ varie s'écrit donc $(-1 - a, -e^{-1-a})$.

## Solution analyse série F (ANA 12.23)

**Domaine** La fonction est définie pour tout $x \neq 0$

**Parité** La fonction est impaire : $f(-x) = -f(x)$. On peut donc l'étudier seulement pour $x$ réel positif. Sur ce domaine on peut réécrire la fonction en abandonnant la valeur absolue :

$$f(x) = \frac{1 + \ln(2x)}{2x}$$

**Asymptotes**

**Asymptote verticale** $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$.
L'axe des $y$ est donc une asymptote verticale.

**Asymptote horizontale**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0 \text{ (en appliquant la règle de l'Hospital).}$$

L'axe des $x$ est donc une asymptote horizontale.

**Dérivée première**

$$f'(x) = \frac{-\ln(2x)}{2x^2}$$

La dérivée s'annulle pour $x = 1/2$.

**Dérivée seconde**

$$f''(x) = \frac{-1 + 2\ln(2x)}{2x^3}$$

La dérivée seconde s'annulle pour $\ln(2x) = 1/2$, c'est-à-dire pour $x = \frac{1}{2}e^{1/2} \approx 0.82$.

**Tableau de signes**

| $x$ | | $\frac{1}{2e}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2}e^{1/2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 1 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| croiss. | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ | Max | $\searrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ |
| conc. | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | Infl. | $\uparrow$ |

**Graphe** A faire !

## Solution analyse série B2 (ANA12.13)

**Domaine de définition :** $x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R}\ \{0\}$

**Parité :** pas de parité

**Racines :** Une racine de $y(x)$ apparaît lorsque $x + e^{-1/x} = 0$ ou $-x = e^{-1/x}$ (aux alentours de $-1.76$).

**Limites**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} y(x) &= +\infty \qquad \text{(asymptote verticale } x=0\text{)}\\
\lim_{x\to 0^+} y(x) &= 0^+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty} y(x) &= -\infty \qquad \text{(pas d'asymptote horizontale)}\\
\lim_{x\to +\infty} y(x) &= +\infty \qquad \text{(pas d'asymptote horizontale)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty} \frac{y(x)}{x} &= 1\\
\lim_{x\to +\infty} \frac{y(x)}{x} &= 1\\
\lim_{x\to -\infty} (y(x)-x) &= \lim_{x\to -\infty} e^{-1/x} = 1\\
\lim_{x\to +\infty} (y(x)-x) &= \lim_{x\to +\infty} e^{-1/x} = 1
\end{aligned}$$

Il existe une asymptote oblique $y = x+1$ lorqu'on tend vers l'infini (en $+\infty$ et $-\infty$).

**Dérivée première**

$$y'(x) = 1 + \frac{e^{-1/x}}{x^2}$$

qui est toujours positive.

$$\lim_{x\to 0^+} y'(x) = 1$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^2} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x^2}{e^{1/x}} = \frac{+\infty}{+\infty}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^{-3}}{\frac{-1}{x^2}e^{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^{-1}}{e^{1/x}} = \frac{+\infty}{+\infty}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^{-2}}{\frac{-1}{x^2}e^{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{e^{1/x}} = 0
\end{aligned}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'(x)$ | $1$ | $+$ | ${}^{+\infty}/_{+1}$ | $+$ | $1$ |

**Dérivée seconde**

$$y''(x) = \frac{\frac{1}{x^2}e^{-1/x}x^2 - 2xe^{-1/x}}{x^4} = \frac{(1-2x)e^{-1/x}}{x^4}$$

Lorsque $x = 1/2$, la dérivée seconde s'annule

$$y''(x) = 0$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y''(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | - | |

**En récapitulatif,**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'(x)$ | $1$ | $+$ | ${}^{+\infty}/_{+1}$ | $+$ | $+$ | $+$ | $1$ |
| $y''(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | ${}^{+\infty}/_{0}$ | $\nearrow$ | $\approx 0.64$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| | | $\bigcup$ | | $\bigcup$ | PI | $\bigcap$ | |

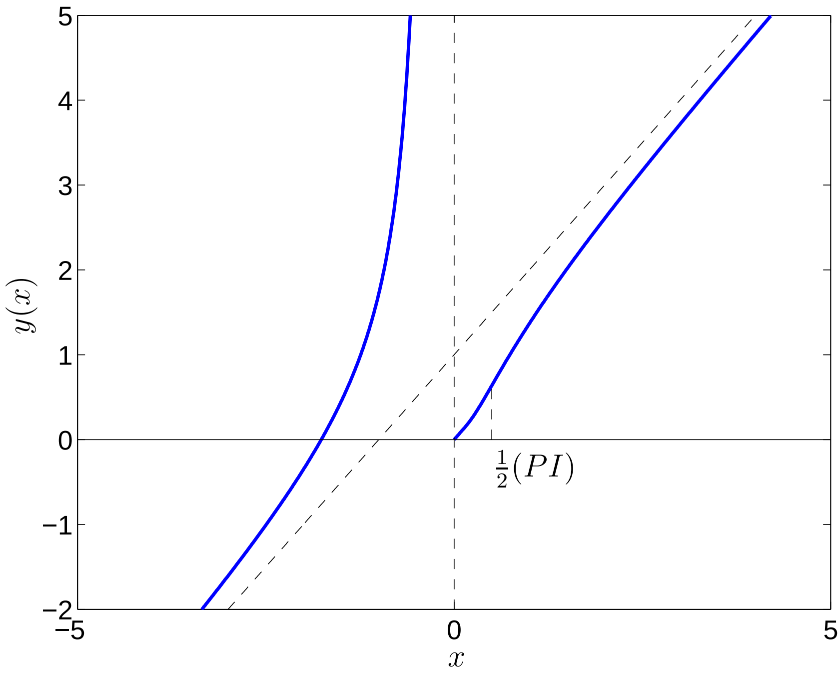



FIGURE 2 – Tracé de la fonction

# UMONS Faculté Polytechnique
# Examen d'admission 2012
# Questions d'algèbre avec solutions

## Question série A (ALG12.14)

Complétez l'expression suivante en remplaçant les pointillés par l'expression appropriée, fournissant ainsi une formule permettant de décomposer $x^5 + y^5$ en facteurs. Expliquez le raisonnement qui vous conduit à cette formule.

$$x^5 + y^5 = (x + y)(\ldots)$$

Peut-on obtenir une formule analogue pour décomposer $x^n + y^n$ quel que soit $n$ ? Si oui, justifiez. Si non, précisez pour quels $n$ c'est possible et pour quels $n$ ça ne l'est pas et justifiez.

## Question série B (ALG12.3)

Soit $p(x) = mx^2 - 2x - 4m - 1 \qquad m < 0$

a) Démontrez que les deux racines $x_1$ et $x_2$ de $p(x)$ sont toujours réelles.

b) Pour quelles valeurs de $m$ a-t-on $x_1 < -1 < 1 < x_2$ ?

## Question série C (AL12-4)

Résoudre l'équation suivante ($x \in \mathbb{R}$) :

$$\sqrt{1 + \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$$

## Question série D (ALG12.5)

– Résoudre

$$\log_5 (2x) - \log_5 \left(1 + \sqrt{x}\right) \leq 1$$

## Question série E (AL12-6)

Résoudre l'équation suivante :

$$\log_x a + \ln a = \log_{ax} a$$

où $x$ est la variable et $a$ un paramètre ($x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$). Discuter en fonction de $a$.

## Question série F (ALG12.11)

Soit le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2x + my = 0 \\ x + mz = m \\ mx + 3y + 3z = m \end{cases}$$

Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel $m$, l'inéquation suivante liant les solutions du système est-elle vérifiée

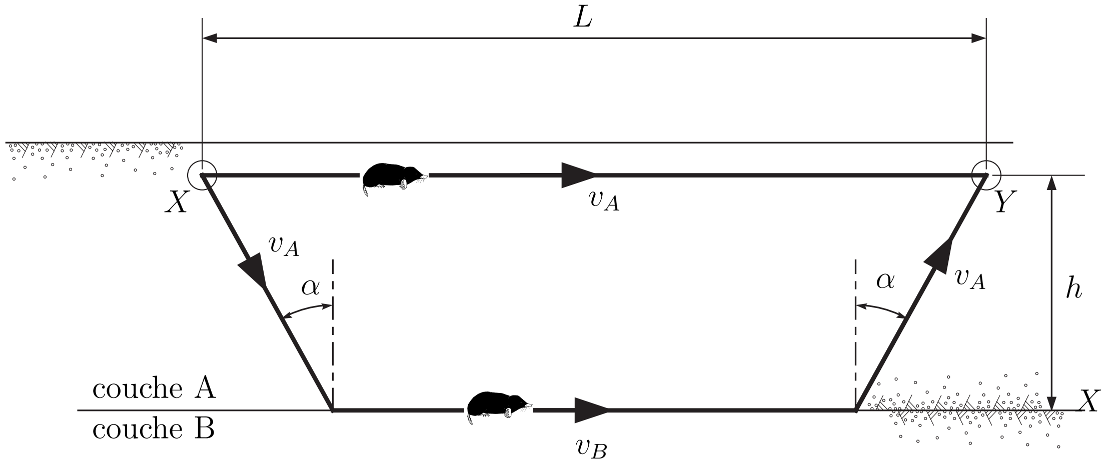
$$x + y + z \geq 1$$

## Question série B2 (ALG12.1) : Le lièvre et la tortue revisité

Deux taupes se disputent une partie de course dans le sol. Pour aller d'un point $X$ vers un point $Y$ (situé à même hauteur), la première propose d'aller en ligne droite dans la couche de sol superficielle. De par la nature de cette couche de sol, sa vitesse d'avancement est définie par $v_A$. La seconde taupe, propose un déplacement plus complexe en trois étapes :

1. Creuser en profondeur jusqu'à atteindre une seconde couche de sol favorable (sa vitesse est identique à celle de la première taupe) ; son trajet est ainsi incliné d'un angle $\alpha$.
2. Longer l'interface entre deux couches, lui permettant d'avancer à une vitesse $v_B > v_A$ (sol meuble).
3. Remonter vers le point $Y$, d'un même angle $\alpha$ avec une vitesse $v_A$.

Sachant que la profondeur de la première couche est $h$, quelle serait la distance $L$ entre les points $X$ et $Y$ pour que les deux taupes arrivent en même temps ? Comment doit être $L$ pour que la seconde taupe arrive la première ?



## Solution série A (ALG12.14)

(1) La première solution qui vient à l'esprit est la suivante :

$$P(x, y) = (x^5 + y^5) = (x + y)Q(x, y)$$

où $Q(x, y)$ est une somme de puissances entières de $x$ et $y$.

La division de $P$ par $(x + y)$ donne :

$$
\begin{array}{cccccc|l}
x^5 & & & & & +y^5 & x \quad +y \\
\cline{7-7}
x^5 & +x^4y & & & & & \\
\cline{1-6}
 & -x^4y & & & & +y^5 & x^4 \quad -x^3y \quad +x^2y^2 \quad -xy^3 \quad +y^4 \\
 & -x^4y & -x^3y^2 & & & & \\
\cline{2-6}
 & & +x^3y^2 & & & +y^5 & \\
 & & +x^3y^2 & +x^2y^3 & & & \\
\cline{3-6}
 & & & -x^2y^3 & & +y^5 & \\
 & & & -x^2y^3 & -xy^4 & & \\
\cline{4-6}
 & & & & +xy^4 & +y^5 & \\
 & & & & +xy^4 & +y^5 & \\
\cline{5-6}
 & & & & & 0 & 
\end{array}
$$

Une alternative serait d'utiliser la règle de Horner, en appliquant la division par $(x+a)$ où $a = y$

| | $x^5$ | $x^4$ | $x^3$ | $x^2$ | $x^1$ | $x^0$ | $-y = -a$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | $y^5$ | |
| coef. de Q | 1 | $-y$ | $+y^2$ | $-y^3$ | $+y^4$ | 0 | |

(2) Peut-on établir une formule du type

$$(x^n + y^n) = (x + y)(\dots)$$

pour tout $n$ ?

Pour que $(x^n + y^n)$ soit divisible par $(x + y)$, il faut que $(-y, y)$ satisfasse

$$P(-y, y) = 0$$

Soit

$$(-y)^n + y^n = 0$$

si $n$ est impair.

## Solution Question série B (ALG12.3)

a) Le réalisant de $p(x)$ vaut
$$\Delta = 16m^2 + 4m + 4$$
Le réalisant de ce trinôme vaut -240 : les racines de $\Delta$ sont donc deux complexes conjuguées et $\Delta$ est donc toujours positif quel que soit $m$. $p(x)$ admet donc 2 racines réelles quel que soit $m$.

b) Le produit et la somme des racines de $p(x)$ valent
$$P = x_1\ x_2 = -\frac{4m+1}{m} \qquad S = x_1 + x_2 = \frac{2}{m}$$
Pour $m \in ]-1/4, 0[$, nous avons que $P > 0$ et $S < 0$ et les deux racines sont négatives. Ces valeurs de $m$ sont donc à exclure.
Pour $m = -1/4$, nous avons que $P = 0$. Cette valeur de $m$ est donc à exclure.
Pour $m < -1/4$, nous avons que $4m^2 + m + 1 = m(4m+1) + 1 > 1$, ce qui nous donne
$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{4m^2 + m + 1}}{m} < 0 \qquad x_2 = \frac{1 - \sqrt{4m^2 + m + 1}}{m} > 0$$
Vérifions la condition $x_1 < -1$
$$\frac{1 + \sqrt{4m^2 + m + 1}}{m} < -1 \quad \text{ou} \quad \sqrt{4m^2 + m + 1} > -m - 1$$
Vérifions maintenant la condition $x_2 > 1$
$$\frac{1 - \sqrt{4m^2 + m + 1}}{m} > 1 \quad \text{ou} \quad \sqrt{4m^2 + m + 1} > -m + 1$$
La condition la plus contraignante est
$$\sqrt{4m^2 + m + 1} > -m + 1 > 0$$
Cette condition est équivalente à
$$m(m+1) > 0$$
Les valeurs possibles pour $m$ sont donc : $m < -1$.

## Solution Question série C (AL12.4)

$$\sqrt{1 + \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$$

<u>Conditions d'existence</u>

1.

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 &\geq 0 \\ x^2\left(x^2 - 1\right) &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \geq 1 \text{ et } x \leq -1 \quad .$$

2.

$$1 + \sqrt{x^4 - x^2} \geq 0$$

Cette inégalité est toujours vraie.

3.

$$\begin{aligned} x - 1 &\geq 0 \\ x &\geq 1 \end{aligned}$$

Au final : $x \geq 1$.

Résolution

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{x^4 - x^2} &= (x-1)^2 = x^2 + 1 - 2x \\ \sqrt{x^4 - x^2} &= x^2 - 2x = x(x-2) \end{aligned}$$

$x(x-2) \geq 0$ si $x \in \leftarrow, 0] \cup [2, \rightarrow$. Il convient donc d'ajouter la condition d'existence $x \geq 2$. Nous pouvons ensuite écrire :

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 &= x^2 (x-2)^2 = x^2\left(x^2 + 4 - 4x\right) \\ x^4 - x^2 &= x^4 + 4x^2 - 4x^3 \\ -4x^3 + 5x^2 &= 0 \\ x^2(-4x + 5) &= 0 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation précédente sont $x = 0$ et $x = \frac{5}{4}$. En tenant compte de la condition d'existence $x \geq 2$, l'équation $\sqrt{1 + \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$ ne possède pas de solution.

## Solution Question série E (AL12.6)

Les conditions suivantes doivent être remplies :

$$\begin{aligned} &a > 0 \\ &x \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1, \frac{1}{a}\} \end{aligned}$$

L'équation peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{\ln a}{\ln x} + \ln a &= \frac{\ln a}{\ln ax}\\ \frac{1}{\ln x} + 1 &= \frac{1}{\ln ax}\end{aligned}$$

avec $\ln a \neq 0$, c'est-à-dire $a \neq 1$. Si $a = 1$, l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$. En multipliant par $\ln ax \ln x$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\ln ax + \ln ax \ln x &= \ln x\\ \ln a + \ln x + (\ln a + \ln x)\ln x &= \ln x\\ \ln^2 x + \ln a \ln x + \ln a &= 0\end{aligned}$$

En posant $X = \ln x$, on obtient :

$$X^2 + \ln a X + \ln a = 0$$

Le discriminant vaut $\Delta = \ln^2 a - 4\ln a$. En posant $Y = \ln a$, on obtient l'équation $\Delta = Y^2 - 4Y$ dont les racines sont $Y = 0$ et $Y = 4$. $Y = 0$ est à rejeter puisque $\ln a \neq 0$. Différents cas sont à considérer :

1. Si $Y = \ln a = 4$, c'est-à-dire $a = e^4$, l'équation en $X$ devient $X^2 + 4X + 4 = 0$. Celle-ci possède une solution donnée par $X = \ln x = \frac{-4}{2} = -2$. $x$ vaut donc $e^{-2}$. Cette solution est bien différente de $\frac{1}{a} = e^{-4}$. Elle n'est donc pas à rejeter.
2. Si $Y = \ln a \in ]0, 4[$, c'est-à-dire pour $a \in ]1, e^4[$, $\Delta < 0$ et l'équation n'a pas de solution.
3. Si $Y = \ln a \in \leftarrow, 0[\cup]4, \rightarrow$, c'est-à-dire pour $a \in ]0, 1[\cup]e^4, \rightarrow$, $\Delta > 0$ et l'équation en $X$ possède deux solutions données par :

$$\begin{aligned}X =& \frac{-\ln a \pm \sqrt{\ln^2 a - 4\ln a}}{2}\\ x =& e^{\frac{-\ln a \pm \sqrt{\ln^2 a - 4\ln a}}{2}}\end{aligned}$$

Ces solutions sont à prendre en compte si elles sont différentes de $\frac{1}{a}$.

## Solution Question série F (ALG 12.11)

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \\ m & 3 & 3 \end{vmatrix} = -6m - m(3-m^2) = m(m-3)(m+3) \\
\Delta_x &= \begin{vmatrix} 0 & m & 0 \\ m & 0 & m \\ m & 3 & 3 \end{vmatrix} = -m(3m-m^2) = m^2(m-3) \\
\Delta_y &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & m & m \\ m & m & 3 \end{vmatrix} = 2(3m-m^2) = -2m(m-3) \\
\Delta_z &= \begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \\ m & 3 & m \end{vmatrix} = -6m - m(m-m^2) = m(m-3)(m+2)
\end{aligned}
$$

### Discussion

- $m = 0$

$$\begin{cases} 2x & = 0 \\ x & = 0 \\ 3y + 3z & = 0 \end{cases}$$

  On tire : $x = 0$ ; $y = -z$.
  L'ensemble des solutions est $\{(0, \alpha, -\alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$.
  Ces solutions ne vérifient pas l'inégalité $x+y+z \geq 1$ puisque $x+y+z = \alpha - \alpha = 0$.

- $m = 3$

$$\begin{cases} 2x + 3y & = 0 \\ x + 3z & = 3 \\ 3x + 3y + 3z & = 3 \end{cases}$$

  La troisième équation est redondante. Des deux premières, on tire :

$$y = \frac{-2x}{3}; \qquad z = 1 - \frac{x}{3}.$$

  L'ensemble des solutions est

$$\{(\alpha, -\frac{2\alpha}{3}, 1 - \frac{\alpha}{3}); \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

  Ces solutions vérifient l'inégalité $x + y + z \geq 1$ puisque $x + y + z = 1$.

- $m = -3$

$$\begin{cases} 2x - 3y & = 0 \\ x - 3z & = -3 \\ -3x + 3y + 3z & = -3 \end{cases}$$

En multipliant par $-1$ les deux premières équations et en les additionnant, on obtient : $-3x + 3y + 3z = 3$, ce qui est incompatible avec la troisième équation. Le système n'a donc pas de solution dans ce cas.

- $m \neq 0, 3, -3$
  Dans le cas général, les solutions sont :
  $$x = \frac{m}{m+3}; \qquad y = \frac{-2}{m+3}; \qquad z = \frac{m+2}{m+3}.$$
  0n a donc
  $$x + y + z = \frac{m - 2 + m + 2}{m+3} = \frac{2m}{m+3}$$
  L'inéquation impose que $\frac{2m}{m+3} \geq 1$, d'où l'on tire la condition :
  $$\frac{2m - m - 3}{m+3} = \frac{m-3}{m+3} \geq 0$$
  L'étude du signe de cette expression nous dit que cette condition est remplie si et seulement si $m < -3$ ou $m > 3$ (la valeur $m = 3$ est exclue ici car nous sommes dans le cas où $m$ est supposé différent de $0, 3, -3$).

**Conclusion** En rassemblant les diffférents cas, nous avons que l'inéquation $x+y+z \geq 1$ est satisfaite pour $m < -3$ et $m \geq 3$.

## Solution Question série B2 (ALG12.1)

Soit $t_1$ le temps parcouru par la première taupe :
$$t_1 = \frac{L_1}{v_A} = \frac{L}{v_A}$$
Soit $t_2$ le temps parcouru par la seconde taupe :
$$t_2 = \frac{L'}{v_A} + \frac{L^*}{v_B} + \frac{L'}{v_A} = \frac{2L'}{v_A} + \frac{L^*}{v_B}$$
avec
$$L' = \frac{h}{\cos\alpha}$$
$$L^* = L - 2h\tan\alpha$$
Donc,
$$t_2 = \frac{2\frac{h}{\cos\alpha}}{v_A} + \frac{L - 2h\tan\alpha}{v_B}$$
Les deux taupes arrivent en même temps lorsque $t_1 = t_2$ pour une longueur $L = L_0$, d'où :
$$\frac{L_0}{v_A} = \frac{2\frac{h}{\cos\alpha}}{v_A} + \frac{L_0 - 2h\tan\alpha}{v_B}$$

- La longueur recherchée vaut donc :

$$L_0 = \frac{2h(v_B \frac{1}{\cos\alpha} - v_A \tan\alpha)}{v_B - v_A}$$

(si $L > L_0$, la seconde taupe arrive la première).
- Les deux taupes arrivent en même temps lorsque $t_1 = t_2$ pour une profondeur $h = h_0$. La profondeur recherchée vaut donc :

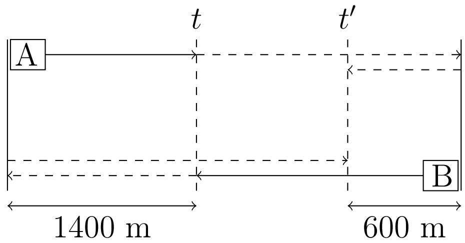
$$h = \frac{(v_B - v_A)L}{2(v_B \frac{1}{\cos\alpha} - v_A \tan\alpha)}$$

(si $h < h_0$, la seconde taupe arrive la première).

# UMONS Faculté Polytechnique
# Examen d'admission 2011
# Questions d'algèbre avec solutions

## Question série A (ALG11.7)

Deux bateaux partant des rives opposées d'un lac avancent l'un vers l'autre. Ils se croisent une première fois à l'instant $t$ à 1400 m d'une des deux rives. Ils continuent leur route jusqu'à la rive opposée et font chacun immédiatement demi-tour, repartant en sens opposé. Quand ils se croisent pour la seconde fois à l'instant $t'$, ils se trouvent à 600 m de l'autre rive. On suppose que chaque bateau se meut à vitesse constante, mais les vitesses des bateaux sont différentes. Quelle est la largeur $L$ du lac ?




## Question série B (ALG11.10)

Soit l'équation

$$(m-6)x^2-(m-3)x+2m-11=0$$

Déterminez $m$ de manière à ce que les racines $x_1$ et $x_2$ de cette équation vérifient

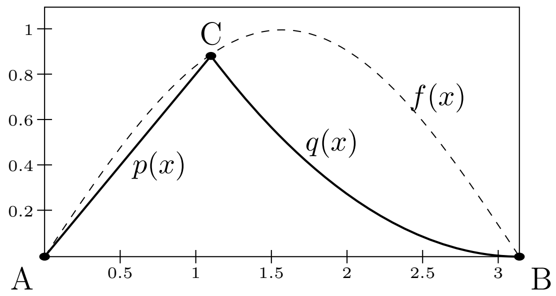
$$x_2 < 0 < x_1 < 4$$

## Question série C (ALG11.22)

Soit une surface $S$ délimitée par les courbes $p(x), q(x)$ et l'axe des abscisses (voir figure) :

- $y = p(x)$ est une droite passant par l'origine $A(0,0)$ et le point $C$
- $y = q(x)$ est une parabole passant par les points $B(\pi, 0)$ et $C$ ; on sait de plus que $B$ est le sommet de cette parabole
- le point $C$, point commun aux courbes $y = p(x)$ et $y = q(x)$, se situe sur la courbe $y = f(x) = \sin x$, pour $x \in ]0, \pi[$.

Déterminez $p(x)$ et $q(x)$ en fonction de la position du point $C$.




## Question série D (ALG11.6)

Soit $c$, un nombre complexe solution de l'équation suivante :

$$z^2 + \alpha z + 1 = 0$$

où $\alpha$ est une constante. Soit $a$, la partie réelle de $c$.

Ecrivez $\alpha$ en fonction de $a$ sachant que, dans le plan complexe, $c$ appartient au cercle de rayon 1 centré à l'origine (cercle unité).

## Question auxiliaire (ALG11.20) sans solution

En attendant le train dans la gare, un étudiant choisit deux nombres $a$ et $b$ tels que $0 < a < b < 1$. Ensuite, il calcule les cinq nombres suivants : $a + b, a \cdot b, a - b, b - a$ et $\frac{a}{b}$. L'étudiant est surpris de constater qu'il y a deux paires de nombres identiques parmi ces cinq nombres.

Que valent les nombres $a$ et $b$ choisis par l'étudiant ?

## Question série E (ALG11.9) sans solution

Déterminez le polynôme de degré minimal qui passe par les points (0,1),(1,-1),(2,1) et (3,-1).

## Question série A2 (ALG11.12) sans solution

Déterminez les valeurs de $x$ comprises entre 0 et $\pi$ qui vérifient

$$2\sin^3 x + 6\sin^2 x - \sin x - 3 = 0.$$

## Solution question série A (ALG 11.7)

Soient $v_A$ et $v_B$ les vitesses des bateaux $A$ et $B$, respectivement. Si $t$ est l'instant où les deux bateaux se croisent pour la première fois, les distances parcourues par chacun d'eux sont respectivement :

$$v_A \times t = 1400m \; ; \qquad v_B \times t = L - 1400m$$

Lorsque les bateaux se croisent de nouveau, à l'instant $t'$, ils ont parcouru respectivement les distance suivantes :

$$v_A \times t' = L + 600m \; ; \qquad v_B \times t' = L + L - 600m$$

En faisant le quotient des distances parcourues à l'instant $t$ et à l'instant $t'$ on obtient :

$$\begin{cases} \frac{v_B}{v_A} & = & \frac{2L-600}{L+600} \\ \frac{v_B}{v_A} & = & \frac{L-1400}{1400} \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{2L-600}{L+600} &= \frac{L-1400}{1400} \\ (2L-600)1400 &= (L-1400)(L+600) \\ 2800L - 600 \times 1400 &= L^2 - 800L - 600 \times 1400 \\ L^2 - 3600L &= 0 \\ L(L-3600) &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, $L = 0$ (impossible) ou $L = 3600$ m.

## Solution question série B (ALG 11.10)

De $x_2 < 0 < x_1$, nous tirons que le produit des racines est négatif, d'où la condition :

$$\frac{2m-11}{m-6} < 0 \tag{1}$$

**Cas a) : $m - 6 > 0$.** Il faut alors $2m - 11 < 0$, d'où $m > 6$ et $m < 11/2$ : impossible.
**Cas b) : $m - 6 < 0$.** Il faut alors $2m - 11 > 0$, d'où $11/2 < m < 6$.
Si $m < 6$, le coefficient de $x^2$ est négatif et la parabole a sa concavité vers le bas. La fonction $f(x) = (m-6)x^2 - (m-3)x + 2m - 11$ est donc positive dans l'intervalle $]x_2, x_1[$ et négative en dehors de cet intervalle. Le point $x = 4$ sera donc en dehors de l'intervalle des racines si et seulement si $f(4) < 0$. Il reste à exploiter cette condition :

$$\begin{aligned} f(4) &= 16(m-6) - 4(m-3) + 2m - 11 \\ &= 14m - 96 + 12 - 11 \\ &= 14m - 95 \end{aligned}$$

Il faut donc que $14m - 95 < 0$ d'où $m < \frac{95}{14} \approx 6.78$.

La condition finale que doit vérifier $m$ est donc $11/2 < m < 6$.

## Solution question série C (ALG11.22)

Soit $\alpha$ l'abscisse du point $C$, la surface $S$ est la somme de deux surface $S_1$ et $S_2$ :

$$S = S_1 + S_2$$

avec

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^\alpha p(x)\ \mathrm{d}x \\ S_2 &= \int_\alpha^\pi q(x)\ \mathrm{d}x\ . \end{aligned}$$

Pour la première fonction, on a :

$$p(x) = ax \quad \text{avec } a = \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Pour la seconde fonction, elle est relative à une parabole passant par les point $(\pi{,}0)$ et $(\alpha, f(\alpha))$ :

$$q(x) = \frac{\sin\alpha}{(\alpha-\pi)^2}(x-\pi)^2$$

(l'astuce ici est de considérer que $q(x)$ est de la forme $r(x-s)^2$ au lieu de la forme habituelle $ax^2+bx+c$).

Les aires recherchées valent donc :

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^\alpha \frac{\sin\alpha}{\alpha}x\ \mathrm{d}x = \left[\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{x^2}{2}\right]_0^\alpha = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\alpha^2}{2} = \sin\alpha\frac{\alpha}{2} \\ S_2 &= \int_\alpha^\pi \frac{\sin\alpha}{(\alpha-\pi)^2}(x-\pi)^2\ \mathrm{d}x = \left[\frac{\sin\alpha}{(\alpha-\pi)^2}\frac{(x-\pi)^3}{3}\right]_\alpha^\pi = -\frac{\sin\alpha}{3}(\alpha-\pi)\ . \end{aligned}$$

Au final,

$$S = \sin\alpha\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin\alpha}{3}(\pi-\alpha) = \frac{\sin\alpha}{6}\left(\alpha+2\pi\right)\ .$$

## Solution question série D (ALG11.6)

Soit $c = a + ib$. Puisque $c$ est solution de l'équation :

$$(a + ib)^2 + \alpha(a + ib) + 1 = 0$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{-1 - (a + ib)^2}{a + ib} \\
\alpha &= -\frac{1}{a + ib} - (a + ib) \\
\alpha &= -\frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} - (a + ib) \\
\alpha &= -\frac{a - ib}{a^2 + b^2} - (a + ib)
\end{aligned}$$

Puisque $c$ appartient au cercle de rayon 1, $a^2 + b^2 = 1$ et l'équation précédente devient :

$$\alpha = -(a - ib) - (a + ib)$$

et on obtient finalement :

$$\alpha = -2a$$

# UMONS Faculté Polytechnique
# Examen d'admission 2011
# Questions d'analyse avec solutions

## Question série A (ANA11.3)

Etudiez la fonction

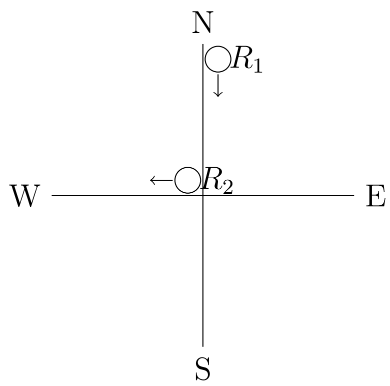
$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

et faites-en une représentation graphique soignée

## Question série B (AN11.13)

Deux robots sentinelles se déplacent périodiquement sur 2 axes perpendiculaires (du Nord au Sud et d'Est en Ouest). Les deux axes sont de même longueur ($2l$) et se coupent en leur milieu.

Pour simplifier les déplacements, il a été convenu que lorsqu'un des robots se trouve au milieu, l'autre doit être à l'une des extrémités de son axe.




Sachant que les vitesses des robots sont identiques et constantes ($= v$), à quel moment sont-ils les plus proches et à quelle distance l'un de l'autre ?

Sachant que la vitesse $v = 3$ km/h, identifiez la valeur minimale de $l$ pour que les robots ne soient jamais à moins de 5m l'un de l'autre.

## Question série C (AN11.11)

Etudiez la fonction

$$f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$$

et faites-en une représentation graphique soignée

## Question série D (AN11.15)

Etudiez la fonction

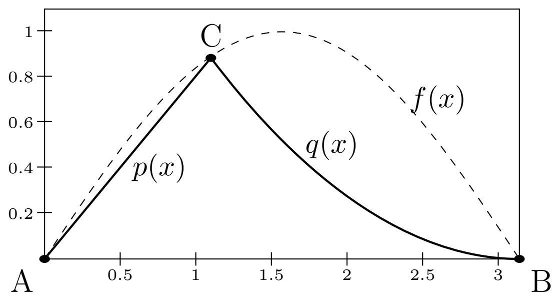
$$f(x) = |x-2| + \frac{1}{|2x-1|}$$

et faites-en une représentation graphique soignée.

## Question série E (AN11.5) sans solution

Soit une surface $S$ délimitée par les courbes $p(x), q(x)$ et l'axe des abscisses (voir figure) :

- le point $C$, point commun aux courbes $y = p(x)$ et $y = q(x)$, est le point de coordonnées $(\alpha, \sin(\alpha))$ avec $\alpha \in ]0, \pi[$.
- $y = p(x)$ est une droite passant par l'origine $A(0,0)$ et le point $C$
- $y = q(x) = \frac{\sin(\alpha)}{(\alpha-\pi)^2}(x-\pi)^2$ est une parabole passant par les points $B(\pi, 0)$ et $C$ et dont le sommet est $B$.




Calculez la surface $S$ et déterminez la valeur de l'abscisse $\alpha$ du point $C$ dans l'intervalle $]\pi/2, 3\pi/4[$ pour laquelle cette surface est maximale.

## Question série A2 (AN11.8) sans solution

Etudiez la fonction :

$$f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x^2+2x+4}$$

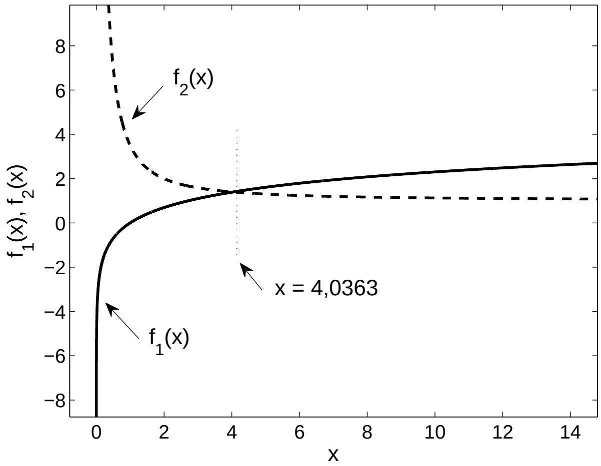
et faites en une représentation graphique soignée. Le calcul de la dérivée seconde n'est pas demandé.

**Aide :** Pour vous aider à déterminer les zéros de la dérivée première, la figure ci-dessous représente les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ telles que :

$$f_1(x) = \ln x$$

$$f_2(x) = \frac{x^2+2x+4}{x(x+1)}$$

Les deux courbes se croisent en $x = 4,0363$.




## Solution question série A (AN 11.3)

1. Domaine : $x^2 - 1 \geq 0 \;\rightarrow\; x \leq -1$ ou $x \geq 1$
   dom($f$)$= ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
2. Parité : ni paire, ni impaire
3. Zéros : $x = -\sqrt{x^2-1}$ donc $x^2 = x^2 - 1$ : impossible
4. Asymptotes
   – AH :
   $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty + \infty$
   Pour lever cette indétermination, on écrit :

$$f(x) = \frac{(x+\sqrt{(x^2-1)})(x-\sqrt{(x^2-1)})}{(x-\sqrt{(x^2-1)})} = \frac{x^2-x^2+1}{x-\sqrt{(x^2-1)}} = \frac{1}{x-\sqrt{(x^2-1)}}$$

   d'où $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$. On a l'asymptote horizontale $y = 0$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$.
   – AO :
   $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 2$ $\lim_{x\to\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to\infty} -x + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 0$ (voir calcul de l'AH).
   On a donc $y = 2x$ comme asymptote oblique pour $x \to +\infty$.
   – $\lim_{x\to\pm1} f(x) = \pm 1$
5. Dérivée $f'$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}2x = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

   Zéros de $f'$ : $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = -1$ d'où : $x = -\sqrt{x^2-1}$ et $x^2 = x^2 - 1$, ce qui est impossible.
   Tableau de signe de $f'$ :

| $x$ | | $-1$ | | $+1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-\infty$ | / | $+\infty$ | $+$ |

6. Dérivée $f''$ :

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2-1} - x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{x^2-1-x^2}{(x^2-1)^{3/2}} = \frac{-1}{(x^2-1)^{3/2}}$$

   Zéros de $f''$ : toujours négative

7. Tableau de signe :

| $x$ | | $-1$ | | $+1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | $-1$ | / | $1$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $-$ | $-\infty$ | / | $+\infty$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-\infty$ | / | $-\infty$ | $-$ |

8. Graphe (à faire)

## Solution question série B (AN 11.13)

Convenons qu'à l'instant $t = 0$ le robot $R1$ soit au Nord et le robot $R2$ au centre. A un instant $t$, $R1$ se trouve en $0, l - vt$ et le robot $R2$, en (vt,0), où $v$ est la vitesse commune des deux robots. Ces positions sont correctes lorsque $vt$ est inférieur à $l$. Le carré de la distance $d^2$ entre les deux robots est

$$\begin{aligned} D \equiv d^2 = &\quad v^2t^2 + (l-vt)^2 \\ = &\quad l^2 - 2lvt + 2v^2t^2 \end{aligned}$$

$d$ est minimum si $D$ est minimum (car$d \geq 0$. On a :

$$D'(t) = -2lv + 4v^2t$$

D'où, $D'(t) = -2lv + 4v^2t$ et $D'(t) = 0$ ssi $t^* = \frac{2lv}{4v^2} = \frac{l}{2v}$. Il s'agit bien d'un minimum puisque $D(t)$ est une parabole à concavité tournée vers le bas. On a donc, comme position des robots assurant la distance minimale,

$$R1(t^*) = (0, l/2) \quad \text{et} \quad R2(t^*) = (-l/2, 0).$$

On a encore :

$$d(t) = \sqrt{(l/2)^2 + (l/2)2} = \frac{\sqrt{2}}{2}l.$$

Si $v = 3$km/h et $d_{min} = 5m$, $l_{min} = \sqrt{2}.d_{min} = 5\sqrt{2}$m

## Solution question série C (AN11.11)

**Domaine de définition :** $x^2 - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in ]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$

**Parité :** $y(x)$ est une fonction impaire, on peut délimiter l'étude dans l'intervalle $[1, \infty[$

**Limites**

$$\lim_{x \to 1^-} y(x) = 0^+ \qquad \text{(pas d'asymptote)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty \ ; \ \lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x} = +\infty \qquad \text{(pas d'asymptote)}$$

**Racines :** $x = \pm 1$ dans l'intervalle $[1, \infty[$. La fonction $y(x)$ est donc positive dans ce même intervalle.

**Dérivée première**

$$y'(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} 2x = \frac{(x^2 - 1) + x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Il apparaît que les racines du numérateur ne se trouvent pas dans l'intervalle $[1, \infty[$.

| $x$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y'(x)$ | | $+$ | |

La fonction $y'(x)$ est également positive, la pente de $y(x)$ l'est également.

$$\lim_{x \to 1^-} y'(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty \qquad \Rightarrow \text{tangente verticale}$$

**Dérivée seconde**

$$\begin{aligned} y''(x) = \frac{4x\sqrt{x^2 - 1} - (2x^2 - 1)\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}}{(\sqrt{x^2 - 1})^2} &= \frac{4x(x^2 - 1) - x(2x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^{3/2}} \\ &= \frac{4x^3 - 4x) - 2x^3 + x)}{(x^2 - 1)^{3/2}} \\ &= \frac{2x^3 - 3x}{(x^2 - 1)^{3/2}} \\ &= \frac{2x(x^2 - 3/2)}{(x^2 - 1)^{3/2}} \end{aligned}$$

| $x$ | $1$ | | $\sqrt{3/2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**En récapitulatif,**

| $x$ | $1$ | | $\sqrt{3/2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'(x)$ | $+\infty$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+\infty$ |
| $y''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | I | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| | | $\cap$ | | $\cup$ | |

Les coordonnées du point d'inflexion est : $y(\sqrt{3/2}) = \sqrt{3/2}\sqrt{\frac{3}{2}-1} = \sqrt{\frac{3}{4}}$. La pente vaut $y'(\sqrt{3/2}) = \frac{3-1}{\sqrt{1/2}} = \sqrt{8}$.

Point intéressant à tracer : $y(2) = 2\sqrt{4-1} \cong 3{,}2$.

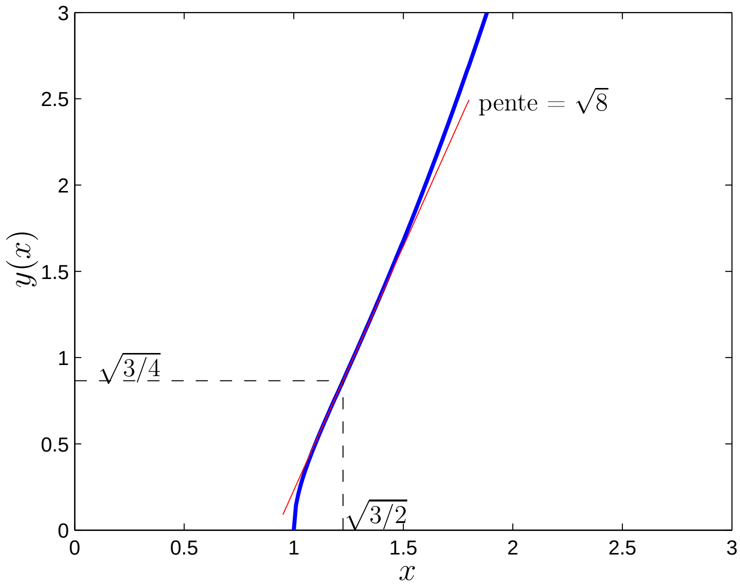



FIGURE 1 – Tracé de la fonction

## Solution question série D (AN11.15)

**Domaine de définition :** $\Re \setminus \{1/2\}$

**Parité :** aucune parité.

**Racines :** aucune racine. La fonction est strictement positive.

**Valeurs particulières :** $1/2$ et 2. En 2, la fonction vaut $f(2) = 1/3$

| $x$ | | $1/2$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2 - x + \frac{1}{1-2x}$ | $+\infty$ | $2 - x + \frac{1}{2x-1}$ | $1/3$ | $x - 2 + \frac{1}{2x-1}$ |

**Dérivée première**

| $x$ | | $1/2$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-1 + \frac{2}{(1-2x)^2}$ | | $-1 - \frac{2}{(2x-1)^2}$ | | $1 - \frac{2}{(2x-1)^2}$ |

**Dérivée seconde**

| $x$ | | $1/2$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $\frac{8}{(1-2x)^3}$ | | $-\frac{8}{(1-2x)^3}$ | | $-\frac{8}{(1-2x)^3}$ |

**Recherche des asymptotes**

- asymptote verticale : en $x = 1/2$.
- asymptote horizontale : il y en a pas.
- asymptote oblique : en $-\infty$, $y = 2 - x$ ; en $+\infty$, $y = x - 2$.

**En récapitulatif,**

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1-\sqrt(2)}{2}$ | | $1/2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | (ind.) | $-$ | $\frac{-11}{9} \Big\vert \frac{7}{9}$ | $+$ | |
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | (ind.) | $+$ | $+$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | $+\infty \vert +\infty$ | $\searrow$ | $1/3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| | A.O. | | $\bigcup$ | | | | non dérivable | | A.O. |

Points intéressants : $\frac{1-\sqrt{2}}{2} \approx -0{,}2$ ; $f\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) \approx 2{,}9$ ; $f(2) = \frac{1}{3}$.

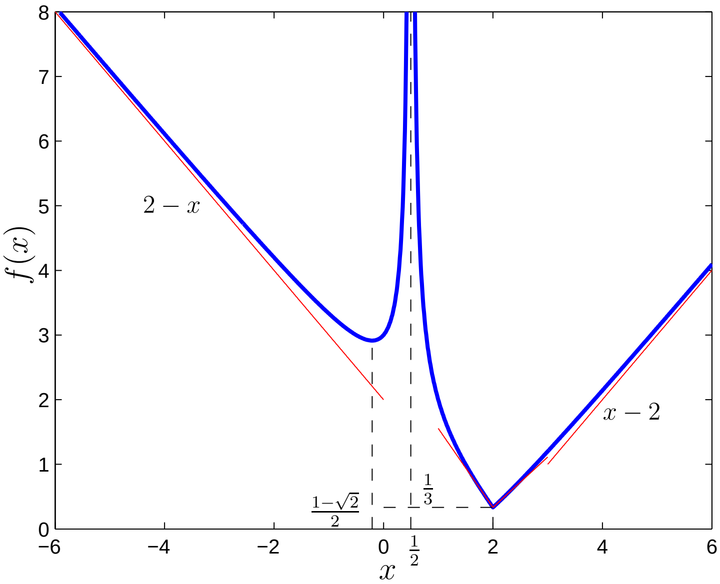



FIGURE 2 – Tracé de la fonction

# FACULTE POLYTECHNIQUE DE MONS
# Examen d'admission
# Algèbre - Analyse – Groupe E
# Mardi 6 juillet 2010

## Question 1 (ALG10.14)

Résoudre l'équation suivante, pour $z$ complexe

$$z = \frac{z^2}{i-z}$$

A quelle condition $f(z) = \frac{z^2}{i-z}$ est-il un imaginaire pur?

## Solution

- Condition d'existence de la solution : $z \neq i$
- $z = 0$ est solution.
- Si on suppose $z \neq 0$, on peut simplifier par $z$, ce qui donne:

  $$1 = \frac{z}{i-z}$$

  d'où l'on tire:

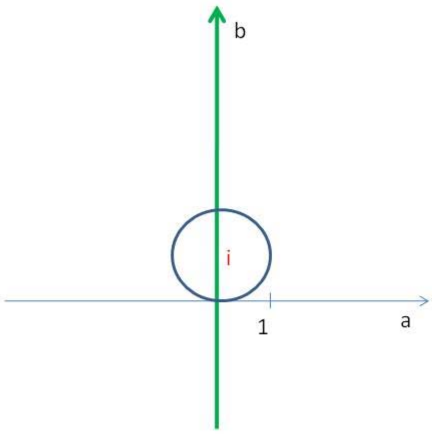
  $$\begin{aligned} i - z &= z \\ i &= 2z \\ z &= \frac{i}{2} \end{aligned}$$

- Les solutions sont donc: $z = 0$ et $z = \frac{i}{2}$

$f(z) = \frac{z^2}{i-z}$ est un imaginaire pur si la partie réelle de la fonction est nulle. Soit $z = a + ib$. Cela donne:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{z^2}{i-z} &= \frac{a^2 - b^2 + 2iab}{i - a - ib} \\ &= \frac{(a^2 - b^2 + 2iab)(-a - i(1-b))}{(-a + i(1-b))(-a - i(1-b))} \\ &= \frac{-a(a^2 + b^2 - 2b) + i(-a^2 b - b^3 - a^2 + b^2)}{a^2 + (1-b)^2} \end{aligned}$$

La partie réelle de $f(z)$ est nulle si $a(a^2+b^2-2b)=0$. L'ensemble des points du plan complexe vérifiant cette condition est la réunion de l'axe imaginaire pur $a=0$ et du cercle de rayon 1 centré en $i$ (équation: $a^2+(b-1)^2=1$), le point $z=i$ exclu. Cet ensemble est représenté sur la figure ci-dessous.




## Question 1 Bis (réserve) (ALG10.08)

Résoudre l'équation suivante en sachant que ses racines $x_1$, $x_2$ et $x_3$ forment une progression géométrique ($x_2 = x_1 r$ et $x_3 = x_1 r^2$ avec $r$ réel):

$$x^3 - \frac{7}{12}x^2 + \frac{7}{72}x - \frac{1}{216} = 0$$

## Solution

Il vient:

$$\begin{aligned}
(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) &= 0 \\
(x-x_1)(x-x_1 r)(x-x_1 r^2) &= 0 \\
x^3 - (x_1 r^2 + x_1 r + x_1)x^2 + (x_1^2 r^3 + x_1^2 r^2 + x_1^2 r)x - x_1^3 r^3 &= 0
\end{aligned}$$

On identifie les coefficients et on a:

$$-x_1^3 r^3 = -\frac{1}{216} = -\frac{1}{6^3}$$
$$-x_1 r^2 - x_1 r - x_1 = -\frac{7}{12}$$
$$x_1^2 r^3 + x_1^2 r^2 + x_1^2 r = \frac{7}{72}$$

On a donc:

$$x_1 = \frac{1}{6r}$$
$$\frac{r^2}{6r} + \frac{r}{6r} + \frac{1}{6r} = \frac{7}{12}$$

$r$ peut donc valoir 2 ou $\frac{1}{2}$. Dans les 2 cas, les trois racines valent: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{12}$.

## Question 2 (ANA10.13)

Etudiez la fonction suivante:

$$f(x) = x - \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$$

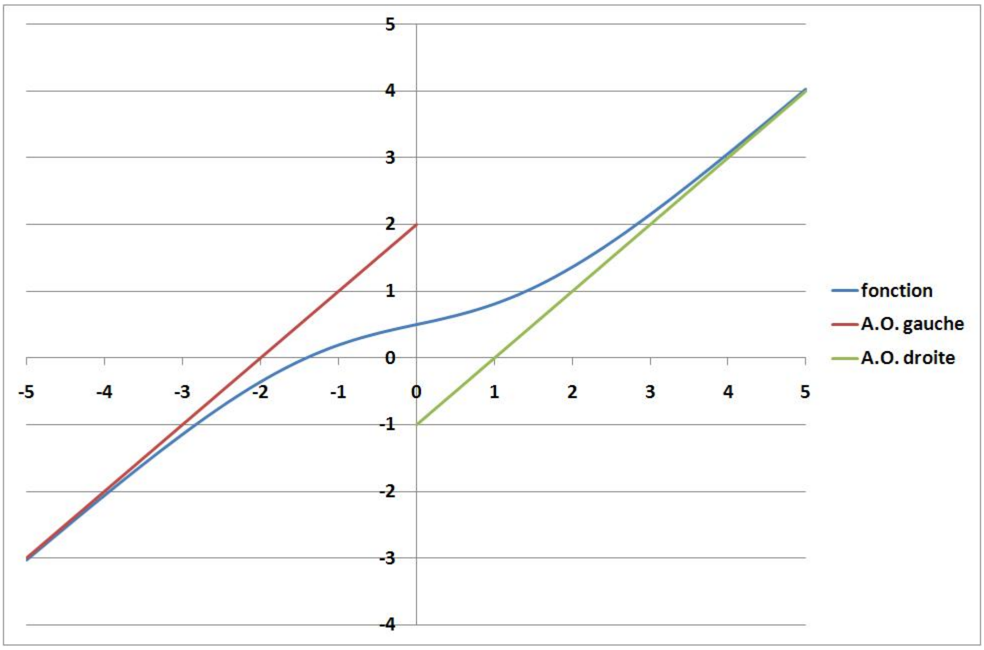
## Solution

- Domaine de $f(x) : x \in \mathbf{R}$
- Racines de la fonction:
  $x - \frac{e^x-2}{e^x+1} = \frac{x(e^x+1)-e^x+2}{e^x+1}$
  Donc, $x(e^x+1) - e^x + 2 = 0$ ou $e^x = -\frac{x+2}{x-1}$. L'analyse de cette fonction montre qu'il existe une racine située entre -2 et 1.
- Remarque: on peut mettre la fonction sous la forme: $f(x) = x-1+\frac{3}{e^x+1}$
- Asymptotes
  - Asymptote verticale: néant
  - Asymptote horizontale:
    $lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
    Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale
  - Asymptote oblique:
    $y = mx + p$ avec $m = lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $p = lim_{x\to+\infty} f(x) - mx$.

On a donc pour l'asymptote oblique en $+\infty$:
$m = lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x(e^x+1)} = 1$
$p = lim_{x\to+\infty} x - 1 + \frac{3}{e^x+1} - x = -1$
La première asymptote oblique a pour équation:
A.O. en $+\infty$: $y = x - 1$
On a ensuite pour l'asymptote oblique en $-\infty$:
$m = lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x(e^x+1)} = 1$
$p = lim_{x\to-\infty} x - 1 + \frac{3}{e^x+1} - x = 2$
La seconde asymptote oblique a pour équation:
A.O. en $-\infty$: $y = x + 2$

- Dérivée première:
  $f'(x) = 1 + \frac{-3e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+2e^x+1-3e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}-e^x+1}{(e^x+1)^2}$
  $f'(x)$ ne s'annule pas $\forall x$ et $f'(x) > 0$ $\forall x$, la fonction est donc toujours croissante.
- Dérivée seconde:
  $f"(x) = \frac{(2e^{2x}-e^x)(e^x+1)^2-(e^{2x}-e^x+1)2(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^4}$
  $f"(x) = \frac{2e^{3x}+2e^{2x}-e^{2x}-e^x-2e^{3x}+2e^{2x}-2e^x}{(e^x+1)^3}$
  $f"(x) = \frac{3e^{2x}-3e^x}{(e^x+1)^3} = \frac{3e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$
  $f"(x) = 0$ si $e^x - 1 = 0$. La dérivée seconde s'annule en $x = 0$. Il y a donc un point d'inflexion.
  La valeur de la fonction $f(x)$ en ce point vaut $f(x) = \frac{1}{2}$. La racine de la fonction sera donc comprise entre $-2$ et $0$.
- Tableau des variations:

| | | | -2 | | 0 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | +++ | +++ | +++ | +++ | +++ | +++ | +++ |
| $f"(x)$ | — | — | — | — | 0 | +++ | +++ |
| $f(x)$ | $A.0. \equiv y = x + 2$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ | 0 | P.I. | $\nearrow$ | $A.O. \equiv y = x - 1$ |



5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
fonction
A.O. gauche
A.O. droite

UNIVERSITE DE MONS

FACULTE POLYTECHNIQUE

*Examen d'admission - Algèbre et Analyse*

Groupe C - Lundi 5 juillet 2010

## Question 1 (AN10-11)

Soit l'équation :

$$x^3 - 9x - m\left(x^2 - 1\right) = 0$$

où $m$ est un paramètre réel. Montrez que cette équation a trois solutions réelles quelle que soit la valeur de $m$ en étudiant les variations de la fonction :

$$y = f(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1}$$

## Question 2 (AL10-18)

Vous désirez construire une piscine chauffée. De manière à éviter les pertes thermiques avec le sol, vous décidez de placer un isolant sur chacune des parois (aussi bien les murs que le sol). Si la hauteur intérieure de la piscine est fixée à 2 m et que le volume utilisé de l'isolant est de 84 $\mathrm{m}^3$, quelle sera la longueur intérieure de la piscine si celle-ci vaut le double de la largeur ? L'épaisseur de l'isolant est de 1 m.

# Solutions

## Question 1 (AN10-11)

$f(x)$ est la fonction obtenue en isolant le paramètre $m$ de l'équation. Dès lors, les solutions de l'équation sont les abscisses des points où le graphe de la fonction $y = f(x) = \frac{x^3-9x}{x^2-1}$ coupe l'horizontale $y = m$. Il faut donc montrer que le graphe de $f(x)$ coupe exactement trois fois toute horizontale.

<u>Domaine</u>

$$x \neq 1$$
$$x \neq -1$$

On peut supposer que $x \neq \pm 1$ car ces valeurs ne sont jamais solutions de l'équation.

<u>Racines</u>

$$x^3 - 9x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 9 = 0$$

Les racines de $f(x)$ sont donc $x = 0, 3, -3$.

<u>Asymptotes verticales</u>

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} = \text{“}\frac{-8}{0}\text{”}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} = \text{“}\frac{8}{0}\text{”}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} = -\infty$$
$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} = +\infty$$

$\Rightarrow$ Asymptotes verticales en $x = \pm 1$.

<u>Asymptotes horizontales</u>

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 9x}{x^2 - 1} = -\infty$$

⇒ Il n'y a pas d'asymptote horizontale.

<u>Dérivée</u>

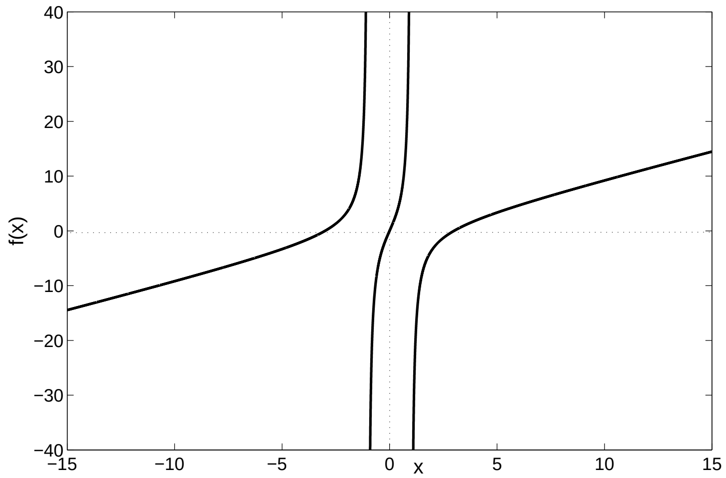
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2-9)(x^2-1)-2x(x^3-9x)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{x^4+6x^2+9}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{(x^2+3)^2}{(x^2-4)^2} \end{aligned}$$

⇒ La pente de $f(x)$ est toujours positive.

<u>En conclusion</u>

- La fonction est continue sur $-\infty, -1[, ]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$.
- $f(x)$ prend toutes les valeurs réelles sur chacun des ces intervalles.
- La pente est positive partout.

⇒ Le graphe de $f(x)$ coupe exactement trois fois toute horizontale.
⇒ L'équation $x^3 - 9x - m(x^2-1) = 0$ a trois solutions réelles quelle que soit la valeur de $m$.

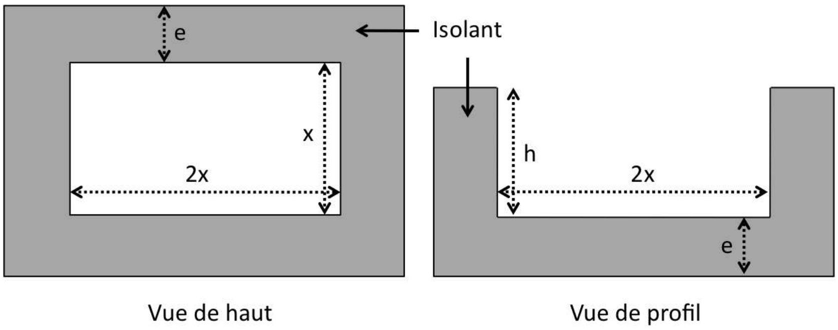



## Question 2 (AL10-18)

<u>Données</u>

Volume de l'isolant : $V = 84\,\text{m}^3$
Epaisseur de l'isolant : $e = 1\,\text{m}$
Hauteur intérieure de la piscine : $h = 2\,\text{m}$

Représentation graphique




Résolution

$$
\begin{aligned}
V &= (2x+2e)e(x+2e) + 2(2x+2e)eh + 2hex \\
&= 2ex^2 + (4e^2 + 2e^2 + 4eh + 2eh)x + 4e^3 + 4e^2h \\
&= 2x^2 + 18x + 12 = 84
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
2x^2 + 18x - 72 &= 0 \\
x^2 + 9x - 36 &= 0
\end{aligned}
$$

$\Delta = 225$ et les solutions de l'équation sont $x = 3$ et $x = -12$. La dernière solution est à rejeter. Dès lors, la largeur de la piscine est de trois mètres et sa longueur de 6 mètres.

# ALG09.15

Résoudre et discuter le système d'équations :

$$\begin{cases} x & +2my & +(2m-1)z & = 2m+1 \\ 3x & +2y & +2mz & = 3 \\ (2m-1)x & +2my & +(2m+1)z & = 2m-1 \end{cases}$$

## Solution

En éliminant $x$ entre (2) et (1) et entre (3) et (1), on trouve :

$$\begin{cases} 2(1-3m)y & +(3-4m)z & = -6m \\ -4m(m-1)y & -2m(2m-3)z & = -2m(2m-1) \end{cases}$$

Si $m \neq 0$, on peut simplifier la dernière relation, ce qui donne :

$$\begin{cases} 2(1-3m)y & +(3-4m)z & = -6m \\ 2(m-1)y & +(2m-3)z & = (2m-1) \end{cases}$$

Ces deux équations sont compatibles si le déterminant est différent de zéro :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2(1-3m) & (3-4m) \\ 2(m-1) & (2m-3) \end{vmatrix} = -4m(m-2) \neq 0$$

$m \neq 0$ **et** $2$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -6m & (3-4m) \\ (2m-1) & (2m-3) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-4m^2+8m+3}{-4m(m-2)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2(1-3m) & -6m \\ 2(m-1) & (2m-1) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{m+1}{2m(m-2)}$$

et :

$$x = \frac{-2m+1}{2m(m-2)}$$

$m = 0$

Le système d'équations devient :

$$\begin{cases} x & & -z & = 1 \\ 3x & +2y & & = 3 \\ -x & & +z & = -1 \end{cases}$$

dont la solution est :

$$\begin{cases} z & = x-1 \\ y & = 3\frac{1-x}{2} \end{cases} \quad x \in R$$

$m = 2$

Le système d'équations devient :

$$\begin{cases} x & +4y & +3z & = 5 \\ 3x & +2y & +4z & = 3 \\ 3x & +4y & +5z & = 3 \end{cases}$$

qui est équivalent à :

$$\begin{cases} x & +4y & +3z & = 5 \\ & 2y & +z & = 0 \\ & 2y & +z & = 3 \end{cases}$$

ce qui est impossible.

# ANA09.7

Déterminez $a$ et $b$ pour que :

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x}$$

avec $b > 0$, ait un maximum (local) égal à 2 et un minimum (local) égal à 6.

## Solution

Il faut supposer que $x \neq 0$. On recherche les valeurs de x qui annulent la dérivée de $f$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x(2x + a) - (x^2 + ax + b)}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - b}{x^2} \end{aligned}$$

Tableau de signe de $f'$ :

| $x$ | | $-\sqrt{b}$ | | $0$ | | $\sqrt{b}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - | / | - | 0 | + |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | / | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Pour que la valeur de $f$ en son maximum local $-\sqrt{b}$ soit 2, il faut que :

$$\frac{b - a\sqrt{b} + b}{-\sqrt{b}} = 2$$

d'où :

$$2\sqrt{b} - a = -2$$

Pour que la valeur de $f$ en son minimum local $\sqrt{b}$ soit 6, il faut que :

$$\frac{b + a\sqrt{b} + b}{\sqrt{b}} = 6$$

d'où :

$$2\sqrt{b} + a = 6$$

Des équations précédentes, on déduit aisément :

$$\begin{aligned} 4\sqrt{b} = 4 &\Rightarrow b = 1 \text{ car on a supposé } b > 0 \\ a = 2 + 2\sqrt{b} &\Rightarrow a = 4 \end{aligned}$$

# FACULTE POLYTECHNIQUE DE MONS
## Examen d'admission
## Algèbre - Analyse – Groupe Charleroi
## Mardi 30 juin 2009

### Question 1 (ANA09.02)

Un designer conçoit une nouvelle carafe. Il s'agit d'un volume de révolution engendré par la rotation de la courbe $x = 4 - y + \frac{1}{2}.\sin(\pi.y)$ autour de l'axe vertical.
Représentez la courbe génératrice de cette carafe, et calculez le volume ainsi défini pour $y \in [0, 2]$.
*Remarque.* Formule pour le calcul d'un volume de révolution engendré par la rotation d'un arc de courbe d'équation $y = f(x),\ x \in [a, b]$ autour de l'axe horizontal $Ox$ :

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

Adaptez la formule au cas où l'arc de courbe tourne autour de l'axe $Oy$.

### Solution

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^2 \left[4 - y + \frac{1}{2}.\sin(\pi.y)\right]^2 \mathrm{d}y \\
&= \pi \int_0^2 \left[16 + y^2 + \frac{1}{4}.\sin^2(\pi.y) - 8y + 4\sin(\pi.y) - y\sin(\pi.y)\right] \mathrm{d}y \\
&= \pi \left[\int_0^2 (16 - 8y + y^2)\mathrm{d}y + 4\int_0^2 \sin(\pi.y)\mathrm{d}y + \frac{1}{4}.\int_0^2 \sin^2(\pi.y)\mathrm{d}y - \int_0^2 y.\sin(\pi.y)\mathrm{d}y\right] \\
&= \pi \left[16y - 4y^2 + \frac{y^3}{3} - 4.\frac{\cos \pi.y}{\pi} + \frac{1}{8}y - \frac{\sin(\pi.y).\cos(\pi.y)}{8.\pi} + y.\frac{\cos(\pi.y)}{\pi} - \frac{\sin(\pi.y)}{\pi^2}\right]_0^2 \\
&= \pi \left[32 - 16 + \frac{8}{3} - \frac{4}{\pi} + \frac{2}{8} + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\right] \\
&= \pi \left[16 + \frac{8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi}\right] \\
&= 2 + \frac{227}{12}\pi \approx 61.4285,
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\int y.\sin(\pi.y)\mathrm{d}y &= y.\frac{-\cos(\pi.y)}{\pi} - \int \frac{-\cos(\pi.y)}{\pi}\mathrm{d}y \\
&= y.\frac{-\cos(\pi.y)}{\pi} + \frac{\sin(\pi.y)}{\pi^2} \\
\int \sin^2(\pi.y)\mathrm{d}y &= -\frac{\sin(\pi.y).\cos(\pi.y)}{\pi} + \int \cos^2(\pi.y)\mathrm{d}y \\
&= -\frac{\sin(\pi.y).\cos(\pi.y)}{\pi} + \int 1 - \sin^2(\pi.y)\mathrm{d}y \\
&= -\frac{\sin(\pi.y).\cos(\pi.y)}{\pi} + y - \int \sin^2(\pi.y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}y - \frac{\sin(\pi.y).\cos(\pi.y)}{2.\pi}.
\end{aligned}$$

## Question 2 (ALG09.05)

Vous faites une descente de la Lesse en kayak et vous avez pique-niqué sur la berge à midi. Vous reprenez la descente à 13h. L'esprit un peu engourdi par la digestion, ce n'est qu'après 2 kilomètres de descente que vous vous apercevez que vous avez oublié votre appareil photo sur la berge où vous avez mangé. Vous décidez de remonter en pagayant à contre-courant pour récupérer votre appareil. Vous atteignez votre lieu de pique-nique à 17h, soit 4h après l'avoir quitté. Heureusement, l'appareil est toujours là.

Calculez votre vitesse moyenne par rapport à l'eau si on suppose que :

- la vitesse du courant est de 2km/h
- votre vitesse par rapport à l'eau est la même que vous ramiez dans le sens du courant ou à contre-courant.

## Solution

La vitesse moyenne par rapport à l'eau est notée $v$. La vitesse par rapport à la berge est donc $v + 2$ (km/h) dans le sens du courant et $v - 2$ (km/h) à contre-courant.

Temps de descente : $\frac{2}{v+2}$

Temps de remontée : $\frac{2}{v-2}$

On a : $\frac{2}{v+2} + \frac{2}{v-2} = 4$.

Résolvons cette équation pour trouver $v$ :

$$\begin{aligned}
2(v+2) + 2(v-2) &= 4(v^2 - 16) \\
4v &= 4v^2 - 16 \\
4(v^2 - v - 4) &= 0
\end{aligned}$$

On trouve :

$$v = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

On a donc $v \approx 2.56$ km/h ; la deuxième solution de l'équation est à rejeter car négative.

# ANA09.10

Etudiez la fonction :

$$f(x) = x^2 (\ln x - 2)$$

## Solution

- Domaine de $f(x)$ : $0 < x < +\infty$.
- Assymptote verticale :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x - 2}{x^{-2}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

  Il n'existe pas d'A.V. en $0^+$
- Assymptote horizontale :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

  Il n'existe pas d'A.H.
- Assymptote oblique $y = mx + p$ :

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} x (\ln x - 2) = +\infty$$

  Il n'existe pas d'A.O.
- Zéros de $f(x)$ :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

$$f(x) = 0 \text{ en } x = e^2 \approx 7.4$$

- Dérivée première :

$$f'(x) = x (2\ln x - 3)$$

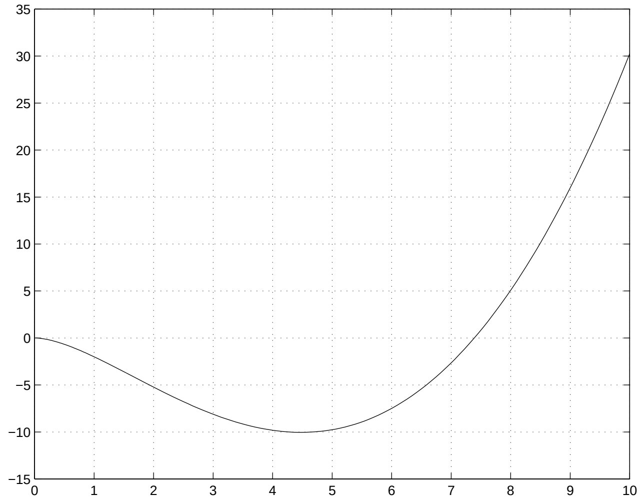
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$$

  Elle s'annule pour $x = e^{3/2} \approx 4.5$.
- Dérivée seconde :

$$f"(x) = 2 (\ln x - 1)$$

  Elle s'annule pour et $x = e \approx 2.7$.
- Tableau synthétique

| | 0 | | $e$ | | $e^{3/2}$ | | $e^2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | 0 | - | - | - | 0 | + | + | + |
| f" | - | - | 0 | + | + | + | + | + |
| f | $\searrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | 0 | $\nearrow$ |

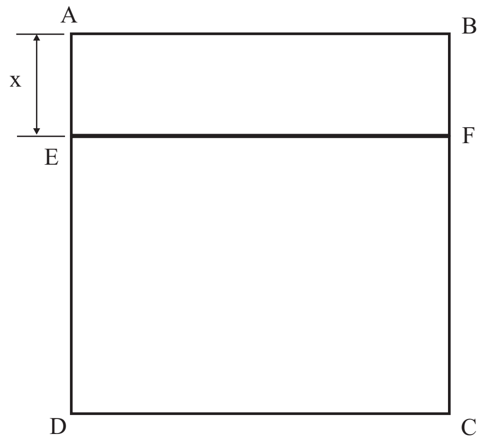

35
30
25
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

# ALG09.4

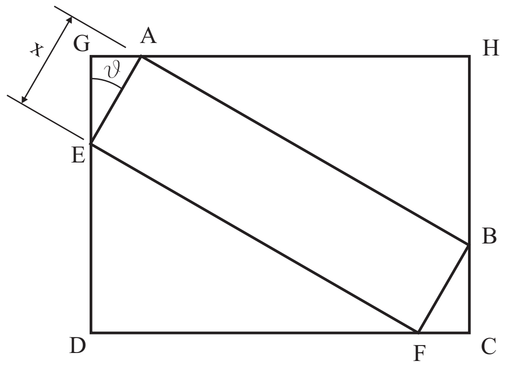
Comment partager un carré en deux rectangles dont le plus petit peut sinsérer dans le plus grand avec chacun de ses sommets placés sur chacun des côtés du plus grand ?

Soit le carré $ABCD$ et $EF$ le segment parallèle à $AB$ qui partage le carré en deux rectangles $ABFE$ et $CDEF$ (fig. a). On suppose par convention que le plus petit des deux rectangles est $ABFE$. On souhaite obtenir la figure (b) dans laquelle $ABFE$ sinsère dans $CDGH$ qui est un rectangle *identique* à $CDEF$.

On choisira d'exprimer le problème en fonction des variables $x = |AE|$ et $\theta = \widehat{AEG}$. La longueur du coté du carré $ABCD$ est égale à 1.




(a)




(b)

## Solution

On exprime aisément que $GA + AH = 1$ et que $GE + ED = 1 - x$. Il vient donc le système :

$$\begin{cases} x\sin\theta & +1\cos\theta & = 1 \\ x\cos\theta & +1\sin\theta & = 1 - x \end{cases}$$

En éliminant $x$ de ces deux équations, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\cos\theta + \sin\theta &= 1 - \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \\ \frac{\cos\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta} &= \frac{\sin\theta - 1 + \cos\theta}{\sin\theta} \\ \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta - \sin\theta + 1}{\sin\theta} &= 0 \\ \frac{2\sin^2\theta - \sin\theta}{\sin\theta} &= 0 \\ \sin\theta &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc, $\theta = \frac{\pi}{6}$. On a $x = 2 - \sqrt{3}$ et le côté $GD = \sqrt{3} - 1$.

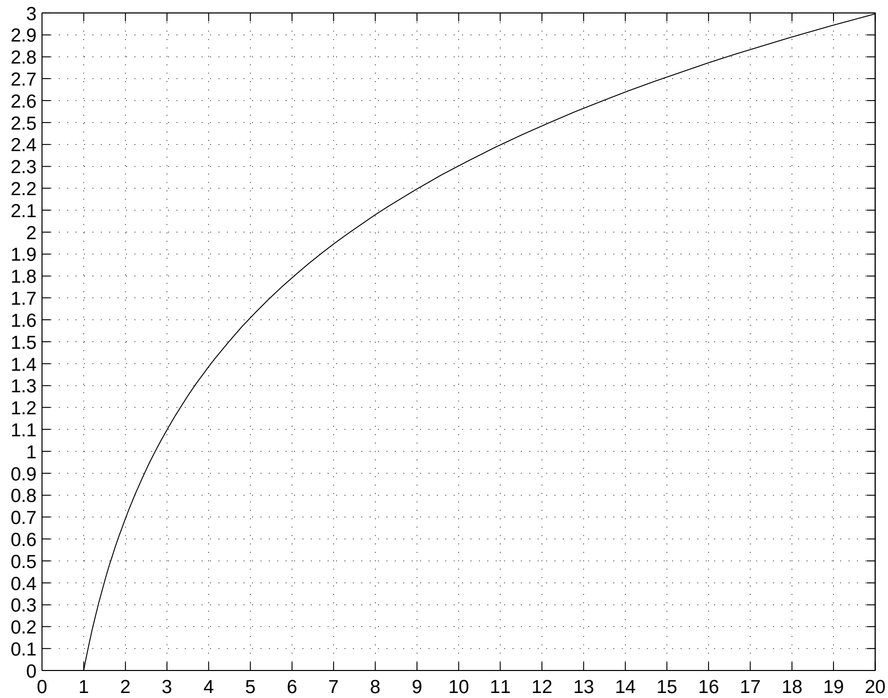
# ANA09.16

Etudiez la fonction :

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}e^x\right)$$

et faites-en une représentation soignée pour $x \in [-5; 2]$.

On trouvera ci-après le graphe de la fonction $z = \ln t$.




Remarque : ne pas calculer la dérivée seconde.

## Solution

**Domaine :** Le domaine de $f(x)$ est $R$. $f(0) = 1$ et $-1 \leq f(x) \leq +1$

**Parité :** La fonction n'est ni paire, ni impaire, ni périodique.

**Asymptote verticale :** aucune

**Asymptote horizontale** : oui car :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

**Zéros :**

$$0 = \sin\left(\frac{\pi}{2}e^x\right) \Rightarrow \frac{\pi}{2}e^x = k\pi \Rightarrow x = \ln(2k) \text{ avec } k = 1, 2, 3 \ldots$$

$$\begin{aligned} k = 1 &\Rightarrow x_1 = \ln(2) \approx 0.7 \\ k = 2 &\Rightarrow x_2 = \ln(4) \approx 1.4 \\ k = 3 &\Rightarrow x_3 = \ln(6) \approx 1.8 \\ k = 4 &\Rightarrow x_4 = \ln(8) \approx 2.1 \end{aligned}$$

**Dérivée première :**

$$f'(x) = \frac{\pi}{2}e^x \cos\left(\frac{\pi}{2}e^x\right)$$

La dérivée s'annule en :

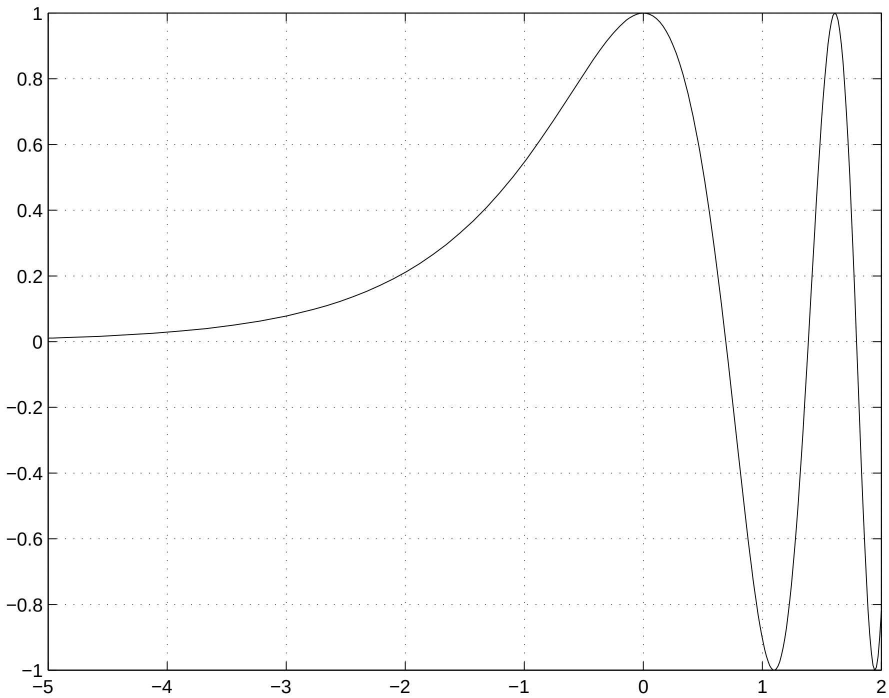
$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}e^x\right) \Rightarrow \frac{\pi}{2}e^x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \ln(2k+1) \text{ avec } k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$k = 0 \Rightarrow x_0 = \ln(1) = 0.0 \Rightarrow \max$$
$$k = 1 \Rightarrow x_1 = \ln(3) \approx 1.1 \Rightarrow \min$$
$$k = 2 \Rightarrow x_2 = \ln(5) \approx 1.6 \Rightarrow \max$$
$$k = 3 \Rightarrow x_3 = \ln(7) \approx 1.9 \Rightarrow \min$$

Remarque : les zéros de la dérivée correspondent évidemment aux abscisses pour lesquelles $f(x) = \pm 1$.

**Tableau récapitulatif**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $0.7$ | | $1.1$ | | $1.4$ | | $1.6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+1$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+1$ |



# ALG09.6

Recherchez les solutions x et y du systéme suivant :

$$\begin{cases} (1+i)x & +2y & = 1-i \\ x & -iy & = i \end{cases}$$

où $i^2 = -1$. Notez que $x$ et $y$ peuvent être des nombres complexes.

## Solution

On garde la première équation et on remplace la seconde par la premièe multipliée par $i$ plus la seconde multipliée par 2 ; on a :

$$\begin{cases} (1+i)x & +2y & = 1-i \\ (i+1)x & & = 1+3i \end{cases}$$

En multipliant la seconde équation par $1-i$, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} (1+i)(1-i)x &= (1-i)(1+3i) \\ 2x &= 4+2i \\ x &= 2+i \end{aligned}$$

En injectant la valeur de $x$ dans la première équation on trouve :

$$\begin{aligned} 2y &= 1-i-(1+i)(2+i) \\ 2y &= 1-i-1-3i \\ y &= -2i \end{aligned}$$