UNIVERSITE DE MONS

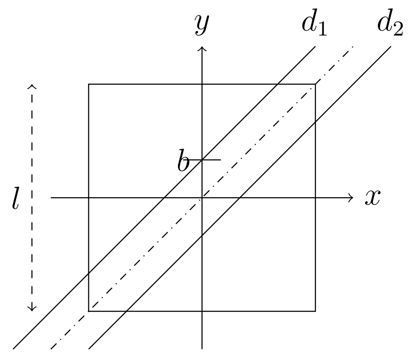
FACULTE POLYTECHNIQUE

Examen d'admission - Algèbre et Analyse

Groupe A - Vendredi 07 juillet 2017

Question 1 (ALG17-10)

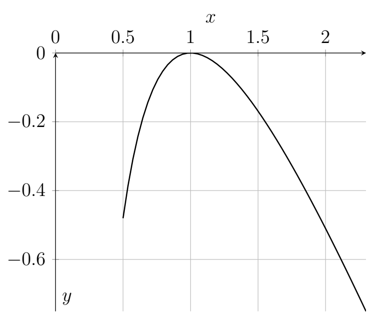
Soit un carré de côté l centré à l'origine, dans le plan xy. Soient deux droites d_1 et d_2 de pente égale à $+1$ et situées symétriquement par rapport à la diagonale du carré.



Que doit valoir b (ordonnée du point d'intersection entre d_1 et l'axe y), afin que d_1 et d_2 divisent le carré en 3 surfaces égales ?

Question 2 (ANA17-20)

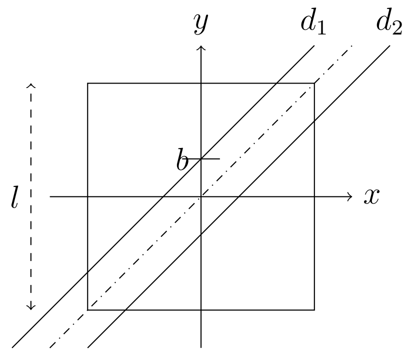
Calculer la surface délimitée par la fonction $f(x) = 1 - x + \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ esquissée ci-dessous et l'axe Ox, pour $x \in [1, 2]$.



Solution ALG17.10

Enoncé :

Soit un carré de côté l situé dans le plan xy. Le centre du carré coïncide avec celui du repère. Soient deux droites d_1 et d_2 de pente égale à $+1$ et situées symétriquement par rapport à la diagonale du carré.



Que doit valoir le paramètre b, afin que les deux droites divisent le carré en 3 surfaces égales ?

Solution :

Notons

— A_1 l'aire au-dessus de la droite d_1, d'équation $y = x + b$.

— A_2 l'aire entre les deux droites.

— A_3 l'aire en-dessous de la droite d_2, d'équation $y = x - b$.

Par symétrie, nous avons directement que $A_1 = A_3$.
A_1 est l'aire d'un triangle isocèle rectangle de côté $(l - b)$:

$$A_1 = \frac{1}{2}.\left(l - b\right)^2$$

Pour que $A_1 = A_2 = A_3$, il faut que $A_1 = \frac{1}{3}.\text{Aire}_{\text{carré}}$. Il faut donc que

$$\frac{1}{2}.\left(l - b\right)^2 = \frac{1}{3}.l^2$$
$$3.\left(l^2 - 2lb + b^2\right) = 2.l^2$$
$$3b^2 - 6bl + l^2 = 0$$

Puisque $\rho = 36.l^2 - 4.3.l^2 = 24.l^2 > 0$, on a deux solutions possibles

$$b_1 = \frac{6l - 2\sqrt{6}l}{6} = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right).l$$
$$b_2 = \frac{6l + 2\sqrt{6}l}{6} = \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right).l$$

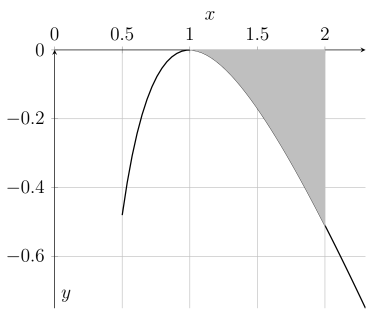
Mais évidemment, b doit rester inférieure à l, ce qui serait la valeur du paramètre si d_1 passait par le coin supérieur gauche du carré. On ne retient donc que la première valeur.

$$b = \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right).l$$

Solution ANA17-20

Enoncé :

Calculer la surface délimitée par la fonction $f(x) = 1 - x + \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ esquissée ci-dessous et l'axe Ox, pour $x \in [1, 2]$.



Solution :

$$\begin{aligned}
\text{Aire} &= -\int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x \\
&= -\int_1^2 (1 - x + \frac{\ln x}{\sqrt{x}})\ \mathrm{d}x \\
&= -\int_1^2 (1 - x)\ \mathrm{d}x - \int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x \\
&= -I_1 - I_2
\end{aligned}$$

On peut alors traiter ces 2 intégrales séparément

$$I_1 = \int_1^2 (1-x)\ \mathrm{d}x = \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = -\frac{1}{2},$$

$$I_2 = \int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x.$$

En intégrant par parties, avec $u = \ln x$ et $v' = 1/\sqrt{x}$; $u' = 1/x$ et $v = 2\sqrt{x}$,

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 2\sqrt{x}\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x \\ &= \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^2 - 2.\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x \\ &= \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^2 - 2\left[2\sqrt{x}\right]_1^2 \\ &= 2\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{2} + 4. \end{aligned}$$

Et finalement,

$$\text{Aire} = \frac{1}{2} - 2\sqrt{2}\ln 2 + 4\sqrt{2} - 4,$$

ce qui donne numériquement (pas nécessaire pour les étudiants) :

$$\frac{1}{2} - 0,3 \sim 0,2$$

UNIVERSITE DE MONS

FACULTE POLYTECHNIQUE

Examen d'admission - Algèbre et Analyse

Groupe B - Jeudi 06 juillet 2017

Question 1 (ALG17-4)

Un trapèze convexe a pour bases a et b ($a > b$) et pour hauteur h. A quelle distance x de la base a faut-il mener une parallèle aux bases pour partager le trapèze en deux parties ayant la même aire ?

Question 2 (ANA17-18)

Soient

$$f(x) = \frac{1}{2}x, \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x-2} - 1.$$

1. Représenter $f(x)$ et $g(x)$, sans nécessairement faire une étude de fonction détaillée.
2. Calculer l'aire comprise entre la fonction $h(x) = \min(f(x), g(x))$ et l'axe Ox pour $x \geq 0$ et $h(x) \geq 0$.

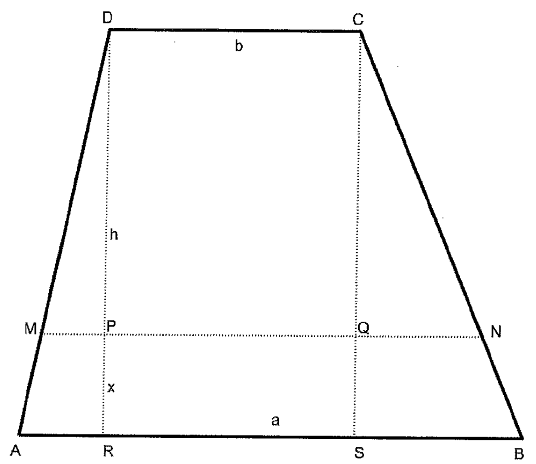
Note : on peut utiliser $\ln(\sqrt{6} - 2) \approx -0.8$ et $\sqrt{6} \approx 2.45$ pour fournir une valeur numérique approchée.

Solution ALG17-4

Enoncé :

Un trapèze convexe a pour bases a et b ($a > b$) et pour hauteur h. A quelle distance x de la base a faut-il mener une parallèle aux bases pour partager le trapèze en deux parties ayant la même aire ?

Solution :



En utilisant les notations de la figure, l'aire de la partie inférieure (ABNM) vaut

$$S_1 = (AB + MN)\frac{x}{2} = (a + MN)\frac{x}{2}$$

et celle de la partie supérieure (MNDC)

$$S_2 = (CD + MN)\frac{h-x}{2} = (b + MN)\frac{h-x}{2}.$$

Dans le triangle ARD, on a

$$\frac{AR}{MP} = \frac{h}{x}.$$

De même, dans SBC, on a

$$\frac{SB}{QN} = \frac{h}{x}.$$

Comme $MN = MP + b + QN$, il vient donc

$$\begin{aligned} MN &= \frac{x}{h}AR + b + \frac{x}{h}SB \\ &= \frac{x}{h}(AR + b + SB) + b\left(1 - \frac{x}{h}\right) \\ &= \frac{ax}{h} + b\left(1 - \frac{x}{h}\right). \end{aligned}$$

Remplaçant MN par cette expression dans S_1 et S_2 et écrivant $S_1 = S_2$, il vient,

$$2(a-b)x^2 - 4ahx + (a+b)h^2 = 0,$$

avec comme solutions

$$x_\pm = \frac{2a \pm \sqrt{2(a^2+b^2)}}{2(a-b)}h.$$

Ces deux racines sont positives car leur produit $(a+b)h^2$ et leur somme $4ah$ sont positifs.
Il faut vérifier si elles sont plus petites que h :

1. $x_- < h$?
$$\frac{2a - \sqrt{2(a^2+b^2)}}{2(a-b)}h < h?$$
$$2a - \sqrt{2(a^2+b^2)} < 2(a-b)?$$
$$2a^2 > 2b^2?$$
Oui, car $a > b$.
2. $x_+ < h$?
$$\frac{2a + \sqrt{2(a^2+b^2)}}{2(a-b)}h < h?$$
$$2a + \sqrt{2(a^2+b^2)} < 2(a-b)?$$
$$\sqrt{2(a^2+b^2)} < -2b?$$
Impossible.

Finalement, la solution est donc $x_- = \frac{2a-\sqrt{2(a^2+b^2)}}{2(a-b)}h$.

Solution ANA17-18

Enoncé :

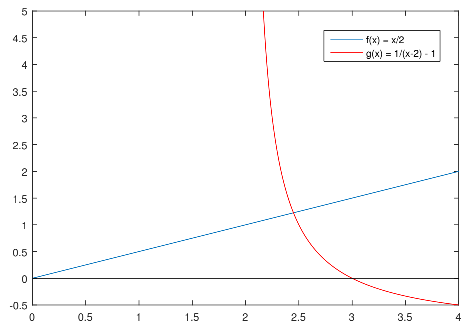
Soient
$$f(x) = \frac{1}{2}x, \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x-2} - 1.$$

1. Représenter $f(x)$ et $g(x)$
2. Calculer l'aire comprise entre la fonction $h(x) = \min(f(x), g(x))$ et l'axe Ox pour $x \geq 0$ et $h(x) \geq 0$.

Note : on peut utiliser $\ln(\sqrt{6}-2) \approx -0.8$ et $\sqrt{6} \approx 2.45$ pour fournir une valeur numérique approchée.

Solution :

1. La figure ci-dessous donne le graphe dans l'intervalle d'intérêt ($x \geq 0$ et $h(x) \geq 0$). Notons que $g(x) = 0$ en $x = 3$.



2. L'intersection entre $x/2$ et $\frac{1}{x-2} - 1$, pour $x > 2$, est donnée par
$$\frac{x}{2} = \frac{1}{x-2} - 1 \Rightarrow x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{6} \approx 2.4495.$$
Pour le calcul de l'aire, il faut décomposer en deux parties
   (a) sous le segment de droite défini par $f(x)$, $x \in [0, \sqrt{6}]$:
   $$\int_0^{\sqrt{6}} \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\sqrt{6}} = 6/4 = 3/2 = 1.5,$$
   (b) sous le morceau d'hyperbole défini par $g(x)$, $x \in [\sqrt{6}, 3]$:
   $$\int_{\sqrt{6}}^3 \left(\frac{1}{x-2} - 1\right) dx = [\ln|x-2| - x]_{\sqrt{6}}^3 = -3 - \ln(\sqrt{6}-2) + \sqrt{6}.$$
   On obtient donc que l'aire vaut $-3/2 - \ln(\sqrt{6}-2) + \sqrt{6} \approx 1.75$.

UNIVERSITE DE MONS

FACULTE POLYTECHNIQUE

Examen d'admission - Algèbre et Analyse

Groupe C - Jeudi 06 juillet 2017

Question 1 (ALG17-5)

Il est 5h15. Dans combien de temps l'aiguille des minutes se superposera-t-elle pour la première fois avec celle des heures ?

Question 2 (ANA17-12)

Soient les courbes d'équation

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2\lambda} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{2\lambda}{e^x + e^{-x}}$$

1. Déterminer les valeurs du paramètre réel $\lambda > 0$ pour lesquelles les courbes se coupent en deux points distincts.
2. Esquisser l'allure des courbes pour une de ces valeurs de λ au choix.
3. Calculer en fonction de λ l'aire de la surface comprise entre les courbes.

Solution ALG17-5

Enoncé :

Il est 5h15. Dans combien de temps l'aiguille des minutes se superposera-t-elle pour la première fois avec celle des heures ?

Solution :

En une heure, la grande aiguille parcourt 360° alors que la petite n'en parcourt que 30. Après un temps t (en minutes), la grande aiguille a donc tourné de

$$\alpha_g = 360\frac{t}{60} = 6t,$$

et la petite de

$$\alpha_p = 30\frac{t}{60} = \frac{t}{2}.$$

Au point de départ du problème (5h15), la grande aiguille est sur le 3, et la petite se situe entre le 5 et le 6. Plus précisément, en mesurant les angles par rapport à midi, la grande est à

$$\alpha_g^0 = 90°,$$

et la petite à

$$\alpha_p^0 = 150 + \frac{30}{4} = 157,5°.$$

L'équation donnant t est donc

$$90 + 6t = 157,5 + \frac{t}{2},$$

dont on déduit

$$11t = 135 \iff t = 12,27 \text{ minutes.}$$

Solution ANA17-12

Enoncé :

Soient les courbes d'équation

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2\lambda} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{2\lambda}{e^x + e^{-x}}$$

1. Déterminer les valeurs du paramètre réel $\lambda > 0$ pour lesquelles les courbes se coupent en deux points distincts.
2. Esquisser l'allure des courbes pour une de ces valeurs de λ au choix.
3. Calculer en fonction de λ l'aire de la surface comprise entre les courbes.

Solution :

1. Les courbes se couperont si

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2\lambda} = \frac{2\lambda}{e^x + e^{-x}}$$

$$\iff \left(e^x + e^{-x}\right)^2 = 4\lambda^2$$

$$\iff \left(e^x + e^{-x}\right) = 2\lambda$$

En posant $y = e^x$, on obtient comme solutions

$$y_1, y_2 = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}.$$

Ensuite, pour $\lambda \geq 1$,

$$x_1, x_2 = \ln\left(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}\right).$$

Il faut donc que $\lambda > 1$ pour que les courbes se coupent en deux points distincts.

Notons que ces deux solutions (x_1, x_2) sont symétriques par rapport à l'origine, car

$$\ln\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}\right) = -\ln\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right) = \ln\frac{1}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}}.$$

2. Une analyse rapide permet d'esquisser les deux courbes représentées à la Fig. 1.

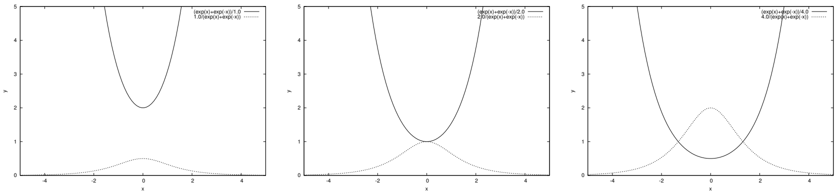


FIGURE 1 – Représentation des deux courbes étudiées, respectivement pour $\lambda = \frac{1}{2}$ (pas d'intersection), $\lambda = 1$ (les deux courbes sont tangentes), $\lambda = 2$ (deux points d'intersection). On ne demande en réalité que ce dernier cas.

3. L'aire demandée est, en utilisant la symétrie du problème,
$$A = 2\left(\int_0^{x_1} \frac{2\lambda}{e^x + e^{-x}}\,dx - \int_0^{x_1} \frac{e^x + e^{-x}}{2\lambda}\,dx\right).$$
La primitive I_1 s'obtient en posant $u = e^x$ avec $du = e^x\,dx$:
$$\int \frac{2\lambda}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int \frac{2\lambda e^x}{e^{2x} + 1}\,dx = \int \frac{2\lambda}{u^2 + 1}\,du = 2\lambda \arctan e^x + C_1.$$
La primitive I_2 est triviale :
$$I_2 = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2\lambda}\,dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2\lambda} + C_2.$$
La valeur de l'aire est donc
$$2\left[2\lambda\left(\arctan\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}\right) - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\lambda}\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1} - \frac{1}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}}\right)\right].$$

UNIVERSITE DE MONS

FACULTE POLYTECHNIQUE

Examen d'admission - Algèbre et Analyse

Groupe D - Vendredi 07 juillet 2017

Question 1 (ALG17-8)

Résoudre l'inéquation suivante, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x^3 + 32x + 18}{x^2 + 4x + 3} \geq 6.$$

Question 2 (ANA17-16)

Soit la fonction $f(x) = 3\sin(x) + \sin(3x)$.

1. Déterminer la plus petite période de f,
2. Calculer f' et situer les extrema avec précision,
3. Situer les points d'inflexion de manière approximative,
4. Réaliser une esquisse du graphe sur une période.

Solution ALG17-8

Enoncé :

Résoudre l'inéquation suivante, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x^3+32x+18}{x^2+4x+3} \geq 6.$$

Solution :

$$\begin{aligned}
\frac{x^3+32x+18}{x^2+4x+3} &\geq 6\\
\frac{x^3+32x+18}{x^2+4x+3} - 6 &\geq 0\\
\frac{x^3+32x+18-6x^2-24x-18}{x^2+4x+3} &\geq 0\\
\frac{x^3-6x^2+8x}{x^2+4x+3} &\geq 0\\
\frac{x(x^2-6x+8)}{x^2+4x+3} &\geq 0\\
\frac{x(x-2)(x-4)}{(x+1)(x+3)} &\geq 0
\end{aligned}$$

		-3		-1		0		2		4	
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x(x-2)(x-4)}{(x+1)(x+3)}$	$-$	//	$+$	//	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

L'ensemble des réponses est donc $]-3,-1[\bigcup[0,2]\bigcup[4,+\infty[$.

Solution ANA17-16

Enoncé :

Soit la fonction $f(x) = 3\sin(x) + \sin(3x)$.

1. Déterminer la plus petite période de f,
2. Calculer f' et situer les extrema avec précision,
3. Situer les points d'inflexion de manière approximative,
4. Réaliser une esquisse du graphe sur une période.

Solution :

1. La plus petite période est 2π.
2. $f'(x) = 3\cos(x) + 3\cos(3x)$.
   $f'(x) = 0 \rightarrow \cos(x) + \cos(3x) = 0$
   donc $\cos(3x) = -\cos(x) = \cos(\pi - x)$.
   Cela donne $3x = \pi - x + 2k\pi$ et $3x = -\pi + x + 2k\pi$.
   Les extrema seront donc, pour une période, situés en : $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{7\pi}{4}$.
3. Pour situer les points d'inflexion, il faut évaluer la dérivée seconde $f''(x)$ et l'annuler.

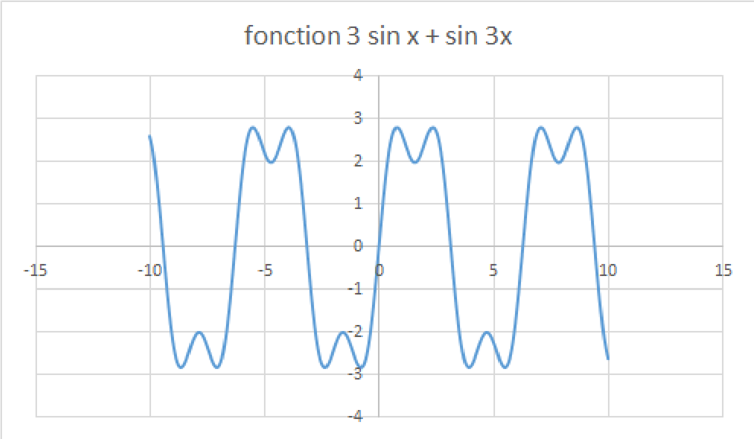
$$\begin{aligned} f''(x) = -3\sin(x) - 9\sin(3x) &= 0 \\ \iff \sin(x) &= -3\sin(3x) \\ \iff \sin(3x) &= 3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x) \\ \iff \sin(x) &= -3(3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x)), \end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\sin(x)(1 + 9\cos^2(x) - 3\sin^2(x)) = 0$$

Les solutions sont : $\sin(x) = 0$ donc $x = \pi + k\pi$ et $1 + 9\cos^2(x) - 3\sin^2(x) = 0$ avec $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, il vient $\cos(x) = \frac{\sqrt{6}}{6}$ dont la solution est $x \cong \pm 1.15 + k\pi$

4. L'esquisse du graphe est donnée à la figure ci-dessous.



UNIVERSITE DE MONS

FACULTE POLYTECHNIQUE

Examen d'admission - Algèbre et Analyse

Groupe E - Mercredi 05 juillet 2017

Question 1 (ALG17-1)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante

$$\log_{1/2}\left(2x - 13 + \frac{15}{x}\right) < 1 + \log_{1/2}\big(2(x-15)\big).$$

Question 2 (ANA17-15)

Une caravane de bédouins se trouve dans l'Atlas à 9km d'une route traversant le désert (9 km est la distance entre la caravane et le point le plus proche de la route - la route est supposée parfaitement rectiligne). Elle doit parvenir le plus rapidement possible à l'oasis située sur cette route, à 15 km du point le plus proche de la caravane (15 km mesurés sur la route). Cette caravane progresse à une vitesse de $4km/h$ dans le sable et à $5km/h$ sur la route. A quel endroit doit-elle rejoindre la route pour arriver au plus vite à l'oasis ?

Solution ALG17-1

Enoncé :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante

$$\log_{1/2}\left(2x - 13 + \frac{15}{x}\right) < 1 + \log_{1/2}\big(2(x-15)\big).$$

Solution :

Les conditions d'existence sont

1. pour le membre de gauche, $2x - 13 + \frac{15}{x} > 0$, autrement dit $(x-5)(x-\frac{3}{2}) > 0$, donc $x < \frac{3}{2}$ ou $x > 5$,
2. pour le membre de droite, $x > 15$,

L'intersection de ces conditions donne $x > 15$.
L'inégalité peut s'écrire

$$\log_{1/2}\left(2x - 13 + \frac{15}{x}\right) < \log_{1/2}(\frac{1}{2}) + \log_{1/2}\left(2(x-15)\right),$$

ou encore

$$\log_{1/2}\left(2x - 13 + \frac{15}{x}\right) < \log_{1/2}\left(\frac{1}{2}2(x-15)\right).$$

Puisque $\log_{1/2} a = \frac{\ln a}{\ln \frac{1}{2}}$, et que $\ln(1/2) < 0$, cela équivaut à

$$\ln\left(2x - 13 + \frac{15}{x}\right) > \ln(x-15).$$

On en déduit que

$$2x - 13 + \frac{15}{x} > x - 15$$

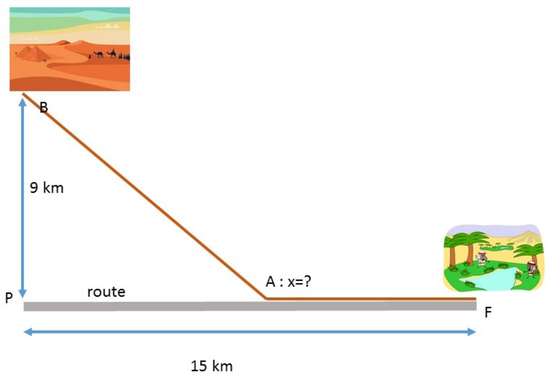
ce qui implique $x^2 + 2x + 15 > 0$, qui est toujours vérifié.
Au final on trouve donc $x \in\,]15, +\infty[$.

Solution ANA17-15

Enoncé :

Une caravane de bédouins se trouve dans l'Atlas à 9km d'une route parfaitement rectiligne traversant le désert (9 km est donc la distance entre la caravane et le point le plus proche sur la route, appelé P). Elle doit parvenir le plus rapidement possible à l'oasis située sur cette route, à 15 km de P (15 km mesurés sur la route). Cette caravane progresse à une vitesse de $4km/h$ dans le sable et à $5km/h$ sur la route. A quel endroit doit-elle rejoindre la route pour arriver au plus vite à l'oasis ?

Solution :



La solution correspond à annuler la dérivée de la fonction qui donne le temps mis pour joindre le point B au point F, en passant par A (voir figure). Il faut ensuite vérifier qu'il s'agit bien d'un minimum. Le temps total est la somme des temps mis pour effectuer BA et puis AF.

$$(BA)^2 = 9^2 + x^2 \quad \rightarrow \quad BA = \sqrt{x^2 + 9^2}$$

$$AF = 15 - x$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{x^2 + 9^2}}{4} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{15 - x}{5}$$

$$t_{total} = t(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{x^2 + 9^2}}{4} + \frac{15 - x}{5}$$

$$t'(x) = \frac{5x - 4\sqrt{x^2 + 9^2}}{20\sqrt{x^2 + 9^2}}$$

$$t'(x) = 0 \rightarrow 5x - 4\sqrt{x^2 + 9^2} = 0$$

$$25x^2 = 16(x^2 + 9^2)$$

$$9x^2 = 16 \times 9^2$$

$$x = 12 \text{ km}$$

On vérifie que c'est bien un minimum, par exemple en évaluant $t(x)$ pour deux valeurs, inférieure et supérieure à 12 km.

UNIVERSITE DE MONS

FACULTE POLYTECHNIQUE

Examen d'admission - Algèbre et Analyse

Groupe F - Mercredi 05 juillet 2017

Question 1 (ALG17-7)

Sans calculer le déterminant, identifier $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 3 & a(a-1) & 6 \\ 4 & 15 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Question 2 (ANA17-11)

On considère la fonction $f(x)$ suivante.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}.$$

1. Effectuer l'étude de la fonction f et la représenter graphiquement.
2. Calculer

$$\int_0^{a/2} f(x)\, dx,$$

ainsi que l'erreur commise en approximant la fonction par une droite pour estimer cette intégrale ($\frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{4}\right) \approx 0.11157$).

Solution ALG17-1

Enoncé :

Sans calculer le déterminant, identifier $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 3 & a(a-1) & 6 \\ 4 & 15 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Solution :

Si le déterminant est nul, c'est que l'une de ses colonnes peut s'exprimer à partir des autres. Par exemple, on peut considérer que la colonne 2 s'exprime comme la somme pondérée des colonnes 1 et 3. On a donc que

$$\begin{aligned} 2.x + 5.y &= 9 \\ 3.x + 6.y &= a(a-1) \\ 4.x + 7.y &= 15 \end{aligned}$$

Si on somme les lignes 1 et 3, on obtient

$$6.x + 12.y = 24 \quad \iff \quad 3.x + 6.y = 12$$

En comparant avec la ligne 2, on peut donc dire que $a(a-1) = 12$. En résolvant l'équation du second degré en a, on obtient $a = -3$ ou $a = 4$.

Solution ANA17-15

Enoncé :

On considère la fonction $f(x)$ suivante.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}.$$

1. Effectuer l'étude de la fonction f et la représenter graphiquement.
2. Calculer

$$\int_0^{a/2} f(x)\, dx,$$

ainsi que l'erreur commise en approximant la fonction par une droite pour estimer cette intégrale ($\frac{1}{2} \ln \left(\frac{5}{4}\right) \approx 0.11157$).

Solution :

1. étude de la fonction
   — Le domaine de $f(x)$ est $\mathcal{D} = \{\, x : a \neq 0 \quad \text{ou} \quad x \neq 0\}$.
   — La fonction est impaire.
   — La fonction s'annule en $x = 0$.
   — Pas d'asymptote verticale.
   — Asymptote horizontale :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

   — Pas d'asymptote oblique
   — Le tableau de signe de la fonction est :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
x	0 $-$ 0 $+$ 0
$x^2 + a^2$	$+$ $+$ $+$ $+$ $+$
$f(x)$	0 $-$ 0 $+$ 0

— La dérivée de la fonction est

$$f'(x) = \frac{a^2 - x^2}{\left(a^2 + x^2\right)^2},$$

elle s'annule en $x = \pm a$. La fonction est donc croissante sur l'intervalle $[-a, a]$, décroissante ailleurs.

— La dérivée seconde de la fonction est

$$f''(x) = \frac{2x\left(x^2 - 3a^2\right)}{\left(a^2 + x^2\right)^3},$$

elle s'annule en $x = 0$ et $x = \pm a\sqrt{3}$. La fonction présente trois points d'inflexion.

— le graphe de la fonction est fourni à la Fig. 1

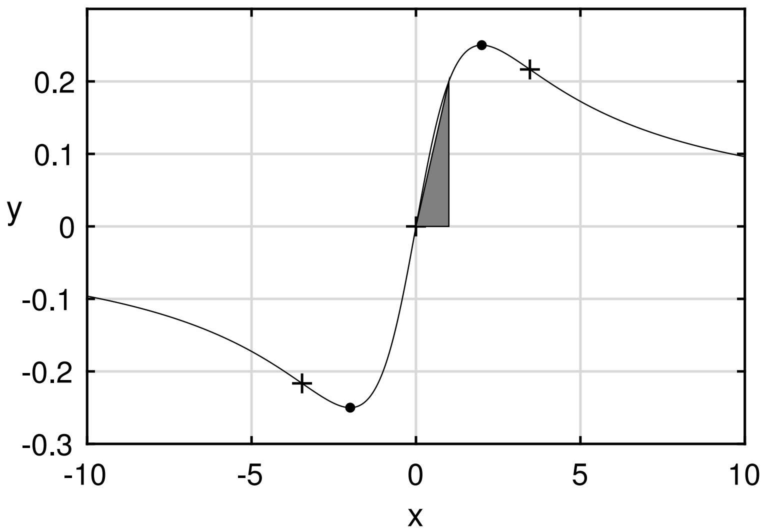


FIGURE 1 – Graphe de la fonction, avec les points d'inflexions indiqués par $(+)$

2. La primitive de la fonction s'obtient facilement, il suffit de poser $u = a^2 + x^2$, ce qui revient à effectuer

$$\int \frac{x}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln(u) + C = \frac{1}{2}\ln\left(a^2 + x^2\right) + C$$

L'intégrale demandée vaut donc

$$\int_0^{a/2} \frac{x}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(a^2 + \frac{a^2}{4}\right) - \ln\left(a^2\right)\right] = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

On vérifie sur le graphe que la fonction se comporte de manière linéaire sur l'intervalle $[0,\ a/2]$, l'aire sous la courbe vaut donc approximativement

$$A \approx \frac{1}{2}\,\frac{a}{2}\,\frac{a/2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{1}{2}\frac{a^2/4}{a^2/4 + a^2} = 0.1$$

L'erreur d'approximation sur l'intégrale est donc de 10%.

UNIVERSITE DE MONS - FACULTE POLYTECHNIQUE

Examen d'admission 2016

Partie Algèbre

Question 1 (ALG16-02)

Résoudre et discuter l'équation suivante ($a \in \mathbb{R}^+$) :

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = a(a-1).$$

Solution 1 (ALG16-02)

Il faut $x \notin \{-1, 1\}$. Dans cette hypothèse, l'équation initiale se transforme en

$$x^4[a(a-1)-2] - 2x^2[a(a-1)+1] + a(a-1) = 0$$

Le réalisant vaut $\Delta = (2a-1)^2$, et on a

$$x^2 = \frac{a(a-1)+1 \pm (2a-1)}{a(a-1)-2} = \ldots = \left\{\frac{a}{a-2}, \frac{a-1}{a+1}\right\}.$$

On doit donc avoir $x^2 \geq 0$ et donc

$$\frac{a}{a-2} \geq 0 \text{ et/ou } \frac{a-1}{a+1} \geq 0.$$

Notons qu'il faut aussi

$$\frac{a}{a-2} \neq 1 \text{ et } \frac{a-1}{a+1} \neq 1,$$

ce qui est toujours le cas.
Les valeurs critiques de a sont donc $\{-1, 0, 1, 2\}$, ce qui donne le tableau de signes :

a		-1		0		1		2	
$\frac{a}{a-2}$	+	+	+	0	-	-	-	∞	+
$\frac{a-1}{a+1}$	+	∞	-	-	-	0	+	+	+

Nous ne considérons ici que $a \in R^+$ et on obtient donc les solutions suivantes :

- $a = 0 : x = 0$
- $0 < a < 1$: pas de solutions
- $a = 1 : x = 0$
- $1 < a < 2 : x = \pm\sqrt{\dfrac{a-1}{a+1}}$
- $a = 2 : x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$
- $2 < a : x \in \left\{\pm\sqrt{\dfrac{a}{a-2}}, \pm\sqrt{\dfrac{a-1}{a+1}}\right\}$

Question 2 (ALG16-03)

Dans le cadre de l'EURO de football, un ingénieur de l'UMONS conçoit 3 robots (R_1, R_2, R_3) pour remettre en état le terrain après chaque match.
– Si les trois robots fonctionnent ensemble, le travail est réalisé en 5 heures.
– Si les trois robots fonctionnement ensemble pendant 3 heures, le travail peut alors être fini par R_2 seul en 9 heures.
– Si R_3 travaille toute la nuit (pendant 10h) avant de s'arrêter, les robots R_1 et R_2 peuvent finir en tandem le travail au petit matin, en 1 heure.
Combien d'heures seraient nécessaires si chaque robot devait faire le travail seul ?

Indication : Considérez v_1, v_2, v_3 les vitesses de travail de chacun des 3 robots (en [m^2/h]) et A la surface totale d'un terrain (en [m^2]).

Solution 2 (ALG16-03)

On a que

$$\begin{aligned} 5v_1 + 5v_2 + 5v_3 &= A \\ 3v_1 + 12v_2 + 3v_3 &= A \\ 1v_1 + 1v_2 + 10v_3 &= A \end{aligned}$$

Ce qui peut se simplifier, en divisant chaque ligne par une constante, en

$$\begin{aligned} 1v_1 + 1v_2 + 1v_3 &= A/5 \\ 1v_1 + 4v_2 + 1v_3 &= A/3 \\ 1v_1 + 1v_2 + 10v_3 &= A \end{aligned}$$

Que l'on peut triangulariser, en soustrayant la première ligne à chacune des 2 autres, en

$$\begin{aligned} 1v_1 + 1v_2 + 1v_3 &= A/5 \\ 0v_1 + 3v_2 + 0v_3 &= 2A/15 \\ 0v_1 + 0v_2 + 9v_3 &= 4A/5 \end{aligned}$$

Et donc, diagonaliser en

$$\begin{aligned} 1v_1 + 0v_2 + 0v_3 &= 3A/45 \\ 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 &= 2A/45 \\ 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 &= 4A/45 \end{aligned}$$

Finalement, on peut remultiplier pour avoir un second membre égal à A dans chaque ligne :

$$\begin{aligned} 15v_1 + 0v_2 + 0v_3 &= A \\ 0v_1 + \frac{45}{2}v_2 + 0v_3 &= A \\ 0v_1 + 0v_2 + \frac{45}{4}v_3 &= A \end{aligned}$$

Ce dernier système modélise les situations où chaque robot devrait faire le travail seul. Les coefficients de ces lignes répondent donc à la question (en [h]).

Question 3 (ALG16-15)

Résoudre l'équation suivante :

$$|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = x+2$$

Solution 3 (ALG16-15)

5 cas sont à considérer :

Cas 1 : $x \leq -1$

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x+1) + x - 3(x-1) + 2(x-2) - (x+2) \\ &= -2x - 4 \end{aligned}$$

La racine est $x = -2$ qui répond à la condition $x \leq -1$

Cas 2 : $-1 \leq x \leq 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1) + x - 3(x-1) + 2(x-2) - (x+2) \\ &= -2 \end{aligned}$$

Il n'y a pas de solution.

Cas 3 : $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1) - x - 3(x-1) + 2(x-2) - (x+2) \\ &= -2x - 2 \end{aligned}$$

La racine est $x = -1$ qui ne peut être acceptée étant donné la condition $0 \leq x \leq 1$.

Cas 4 : $1 \leq x \leq 2$

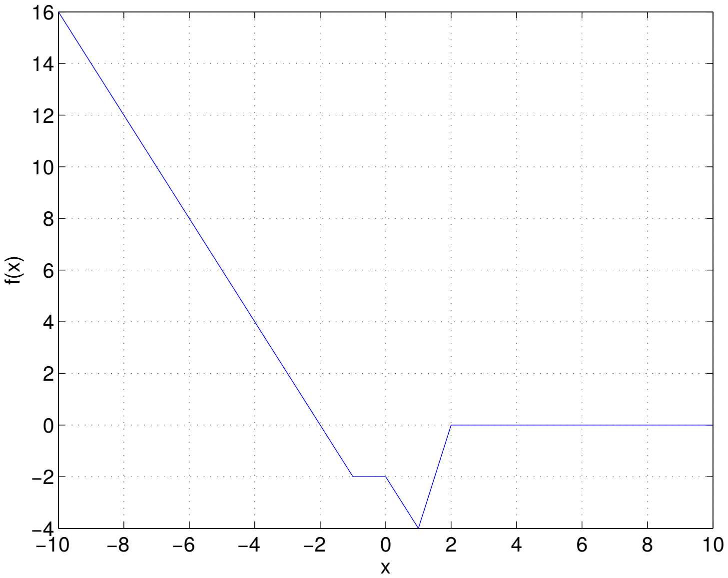
$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1) - x + 3(x-1) + 2(x-2) - (x+2) \\ &= 4x - 8 \end{aligned}$$

La racine est $x = 2$ qui répond à la condition $1 \leq x \leq 2$.

Cas 5 : $x \geq 2$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1) - x + 3(x-1) - 2(x-2) - (x+2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

L'équation admet une infinité de solutions pour $x \geq 2$.



Question 4 (AL16-07)

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\ln^4\left(x^2+4x+3\right) \geq 16$$

On donne :

$$e^{-2} \simeq 0,14$$
$$e^{2} \simeq 7,39$$

Solution 4 (ALG16-07)

La condition d'existence s'écrit :

$$x^2+4x+3>0$$

c'est-à-dire :

$$x \in]-\infty,-3[\cup]-1,\infty[$$

$\ln^4\left(x^2+4x+3\right) \geq 16$		
$\ln\left(x^2+4x+3\right) \geq 2$	ou	$\ln\left(x^2+4x+3\right) \leq -2$
$x^2+4x+3 \geq e^2$		$x^2+4x+3 \leq e^{-2}$
$x^2+4x+\left(3-e^2\right) \geq 0$		$x^2+4x+\left(3-e^{-2}\right) \leq 0$
$x^2+4x-4,39 \geq 0$		$x^2+4x+2,86 \leq 0$
$\Delta = 33,56$		$\Delta = 4,56$
$\sqrt{\Delta} \simeq 5,8$		$\sqrt{\Delta} \simeq 2,1$
$\beta_1 \simeq -4,9$		$\alpha_1 \simeq -3,05$
$\beta_2 \simeq 0,9$		$\alpha_2 \simeq -0,95$
$x \in]-\infty,\beta_1] \cup [\beta_2,\infty[$		$x \in [\alpha_1,\alpha_2]$

Avec la condition d'existence :

$$x \in]-\infty,\beta_1] \cup [\alpha_1, 3[\cup]-1,\alpha_2] \cup [\beta_2,\infty[$$

Question 5 (ALG16-12)

Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{x^2}{\left(x+1-\sqrt{x+1}\right)^2} < \frac{x^2+3x+18}{(x+1)^2}$$

Suggestion : dans la résolution, poser $y=\sqrt{x+1}$

Solution 5 (ALG16-12)

Conditions d'existence :

- $x+1>0 \rightarrow x>-1$
- $x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$
- $x+1-\sqrt{x+1} \neq 0 \Leftrightarrow x^2+x \neq 0 \rightarrow x \neq 0$ et $x \neq -1$

On a donc : $x \in]-1,0[\cup]0,\infty[$

Posons $y=\sqrt{x+1}$. Nous déduisons $x=y^2-1$ et l'inéquation s'écrit :

$$\frac{(y^2-1)^2}{(y^2-y)^2} < \frac{(y^2-1)^2+3(y^2-1)+18}{y^4}$$

avec $y \in]0, 1[\cup]1, \infty[$

$$\begin{aligned}
\frac{(y+1)^2}{y^2} &< \frac{y^4+y^2+16}{y^4} \\
(y+1)^2y^2 &< y^4+y^2+16 \\
2y^3 &< 16
\end{aligned}$$

Vu le domaine de y, $2y^3 < 16$ est satisfaite avec $y < 2$. Autrement dit, on a :

$y \in]0, 1[\cup]1, 2[$ et $x \in]-1, 0[\cup]0, 3[$.

Question 6 (ALG16-13)

Soit une usine d'embouteillage d'eau plate et d'eau gazeuse, où 84 palettes de bouteilles d'eau d'un litre sont produites par jour. L'usine dispose de deux chaînes d'embouteillage, une pour l'eau plate (chaîne 1) et l'autre pour l'eau gazeuse (chaîne 2).
Les vitesses de production des deux chaînes sont différentes mais constantes au cours du temps et ces dernières fonctionnent durant le même laps de temps. On vous demande de déterminer le nombre de palettes d'eau plate et d'eau gazeuse sortantes sachant que si les chaînes d'embouteillage étaient « inversées », il faudrait 1/3 de temps en plus pour embouteiller l'eau gazeuse et 1/4 de temps en moins pour embouteiller l'eau plate.

Solution 6 (ALG16-13)

Soient :
– n_A : le nombre de palettes d'eau plate produites par jour
– n_B : le nombre de palettes d'eau gazeuse produites par jour
– v_1 : la vitesse d'embouteillage de la chaîne 1
– v_2 : la vitesse d'embouteillage de la chaîne 2

On a :

$$n_A + n_B = 84 \tag{1}$$

On peut écrire :

$$\frac{n_A}{v_2} = \frac{3}{4}t \tag{2}$$

$$\frac{n_B}{v_1} = \frac{4}{3}t \tag{3}$$

De plus, les temps de fonctionnement t sont égaux :

$$t = \frac{n_A}{v_1} = \frac{n_B}{v_2} \tag{4}$$

De (1), on tire :

$$n_B = 84 - n_A \tag{5}$$

En remplaçant (5) dans (4), on a :

$$\frac{n_A}{v_1} = \frac{84 - n_A}{v_2} \tag{6}$$

On remplace v_1 et v_2 par leur expression dans (6) :

$$\frac{n_A}{\frac{(84-n_A)}{\frac{4}{3}t}} = \frac{(84 - n_A)}{\frac{(n_A)}{\frac{3}{4}t}} \tag{7}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}t\frac{n_A}{(84 - n_A)} - \frac{3}{4}t\frac{(84 - n_A)}{n_A} = 0$$

On peut simplifier t puisque $t \neq 0$. On obtient :

$$\frac{16n_A^2 - 9(84 - n_A)^2}{12(84 - n_A)n_A} = 0 \tag{8}$$

On sait que $n_A > 0$ et $84 - n_A = n_B > 0$. Donc, (8) devient :

$$16n_A^2 - 9(84 - n_A)^2 = 0$$
$$7n_A^2 + 2 \times 9 \times 84n_A - 9 \times 84^2 = 0$$

Calcul de Δ :

$$\begin{aligned}\Delta = b^2 - 4ac =& (2 \times 9 \times 84)^2 + 4 \times 7 \times 9 \times 84^2 \\ =& 84^2\left((4 \times 81) + (4 \times 7 \times 9)\right) \\ =& (84 \times 24)^2\end{aligned}$$

Comme $n_A > 0$, une seule racine est possible :

$$
\begin{aligned}
n_A =& \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\
=& \frac{(-2\times 9\times 84)+(24\times 84)}{14} \\
=& 36
\end{aligned}
$$

- $n_A = 36$ palettes d'eau plate embouteillées par jour
- $b_B = 48$ palettes d'eau gazeuse embouteillées par jour

Question 7 (ALG16-01)

En fonction du paramètre a, résoudre l'inéquation suivante

$$\frac{\sqrt{x^3\ (x-1)}}{x} \ \leq \ a$$

Solution 7 (ALG16-01)

Les conditions d'existence sont les suivantes : $x^3(x-1) \geq 0$ et $x \neq 0$.

		0		1	
x^3	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	-
$x^3(x-1)$	+	0	-	0	+

Ce qui donne finalement : $x < 0$ ou $x \geq 1$.

Cas $\boxed{x < 0}$

Comme $\frac{\sqrt{x^3\ (x-1)}}{x} < 0$, l'inéquation est toujours vérifiée si $a \geq 0$.

Si $a < 0$, nous avons que $-\frac{\sqrt{x^3\ (x-1)}}{x} \ \geq \ -a$ avec les deux termes de l'inéquation strictement positifs. En élevant ces termes au carré, nous obtenons la condition suivante : $x^2 - x - a^2 \geq 0$.

Ce qui implique : $x \leq \frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}$ ou $x \geq \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$
Comme $x < 0$, nous avons que $x \in]-\infty, \frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}]$.

Cas $\boxed{x \geq 1}$

Comme $\frac{\sqrt{x^3\ (x-1)}}{x} \geq 0$, l'inéquation n'est jamais vérifiée si $a < 0$.

Si $a \geq 0$, nous avons que $\frac{\sqrt{x^3\ (x-1)}}{x} \leq a$ avec les deux termes de l'inéquation positifs. En élevant ces termes au carré, nous obtenons la condition suivante : $x^2 - x - a^2 \leq 0$.

Ce qui implique : $\frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}$
Comme $x \geq 1$, nous avons que $1 \leq x \leq \frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}]$.

En conclusion :
$a \geq 0 \Rightarrow x \in]-\infty, 0[\cup [1, \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}]$

$a < 0 \Rightarrow x \in]-\infty, \frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}]$

Question 8 (ALG16-14)

Déterminez les deux côtés (x, y) de l'angle droit d'un triangle rectangle dont on connait le périmètre $2p$ et l'aire a^2.

Solution 8 (ALG16-14)

Le périmètre (en utilisant Pythagore) et l'aire d'un triangle rectangle s'expriment par :

$$\begin{aligned} x + y + \sqrt{x^2 + y^2} &= 2\,p && (9) \\ \frac{x\,y}{2} &= a^2 && (10) \end{aligned}$$

Le développement de (1), en utilisant l'équation (2), donne :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (2\,p - x - y)^2 && (11) \\ &= 4p^2 - 4px - 4py + 2xy + x^2 + y^2 && (12) \\ &= 4p^2 - 4px - 4py + 4a^2 + x^2 + y^2 && (13) \end{aligned}$$

ce qui mène à :

$$\begin{aligned} 4p^2 - 4px - 4py + 4a^2 &= 0 && (14) \\ x + y &= \frac{a^2 + p^2}{p} && (15) \end{aligned}$$

On peut résoudre le système d'équations de 2 manières.

Méthode 1

Les équations (2) et (7) correspondent au produit $\mathcal{P}$ et à la somme $\mathcal{S}$ des 2 cotés x et y

$$\mathcal{S} = x + y = \frac{a^2 + p^2}{p} \tag{16}$$

$$\mathcal{P} = x\,y = 2\,a^2 \tag{17}$$

On en déduit que x et y sont les solutions de l'équation

$$r^2 - \mathcal{S}r + \mathcal{P} = 0 \tag{18}$$

Il vient donc :

$$\rightarrow x, y = r_{1,2} = \frac{\frac{a^2+p^2}{p} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2+p^2}{p}\right)^2 - 8a^2}}{2} \tag{19}$$

Méthode 2

En injectant (2) dans (7), on obtient une équation en x :

$$x + \frac{2a^2}{x} = \frac{a^2 + p^2}{p} \tag{20}$$

$$x^2 - \frac{a^2 + p^2}{p}x + 2a^2 = 0 \qquad (x \neq 0) \tag{21}$$

On en déduit deux valeurs possibles pour x :

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{\frac{a^2+p^2}{p} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2+p^2}{p}\right)^2 - 8a^2}}{2} \tag{22}$$

En utilisant (7), on obtient les 2 valeurs de y correspondantes :

$$\rightarrow y_{1,2} = \frac{a^2 + p^2}{p} - x_{1,2} = \frac{\frac{a^2+p^2}{p} \mp \sqrt{\left(\frac{a^2+p^2}{p}\right)^2 - 8a^2}}{2} = x_{2,1} \tag{23}$$

On observe que les deux couples de solution $(x_1, y_1)\,[= (x1, x2)]$ et $(x_2, y_2)\,[= (x2, x1)]$ sont identiques. La valeur des côtés x et y correspondent donc aux expressions x_1 et x_2 donnés par (14).

Discussion et commentaires

a) Il existe une solution au problème si

$$\left(\frac{a^2 + p^2}{p}\right)^2 \geq 8a^2 \tag{24}$$

On vérifie également que les valeurs obtenues pour les longueurs x et y sont bien positives.
b) On observe que x=y (triangle rectangle isocèle) si

$$\left(\frac{a^2 + p^2}{p}\right)^2 = 8a^2 \tag{25}$$

c) On peut vérifier l'exactitude des équations (11) et (14) avec, par exemple, $x = 3$ et $y = 4$.

→Dans ce cas, $z = 5$, $2p = 3 + 4 + 5 = 12$ et $a^2 = 3.4/2 = 6$.

UNIVERSITE DE MONS - FACULTE POLYTECHNIQUE

Examen d'admission 2016

Partie Analyse

Question 1 (ANA16-07)

On considère les courbes $g(x) = x^2$ et $h(x) = e^{1-x}$ et on note a l'abscisse du point d'intersection entre ces courbes.
Soit la fonction $f(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ h(x) & \text{si } x > a \end{cases}$$

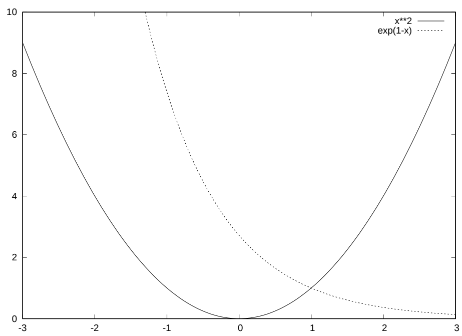
On demande de :

1. déterminer graphiquement la valeur de a,
2. déterminer la valeur de b pour que

$$\int_0^b f(x)dx = 1.$$

Solution 1 (ANA16-07)

1. représentation graphique



2. Déterminer l'abscisse a :

$$a^2 = e^{1-a} \iff 2\ln a = 1 - a \iff a = 1$$

3. Si $b \leq a$, l'intégrale vaut

$$I = \int_0^b x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_0^b = \frac{b^3}{3}$$

ce qui ne peut pas valoir 1.
Il faut donc $b > a$, ce qui donne
$I = \int_0^b f(x)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^b e^{1-x}dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \left[e^{1-x}\right]_1^b = \frac{4}{3} - e^{1-b}$
On obtient donc

$$\frac{4}{3} - e^{1-b} = 1 \to b = \ln 3 + 1$$

Question 2 (ANA16-01)

Étudiez avec précision la fonction

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-4}{2x}\right) + x$$

Solution 2 (ANA16-01)

Domaine de définition La condition d'existence liée au logarithme impose que $\frac{x-4}{2x} > 0$. Ce qui conduit au tableau de signe suivant :

		0		4	
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-4}{2x}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

dom(f) : $x \in]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$

Asymptotes Il pourrait y avoir des asymptotes verticales en $x = 0^-$ ou $x = 4^+$ et des asymptotes horizontales ou obliques en $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{x-4}{2x}\right) + 1 = 1$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(\frac{x-4}{2x}\right) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$

Finalement, il y a

– Asymptote verticale $x = 0^-$
– Asymptote verticale $x = 4^+$
– Asymptote oblique en $x \to \pm\infty$ d'équation $y = x - \ln 2$

Dérivée première

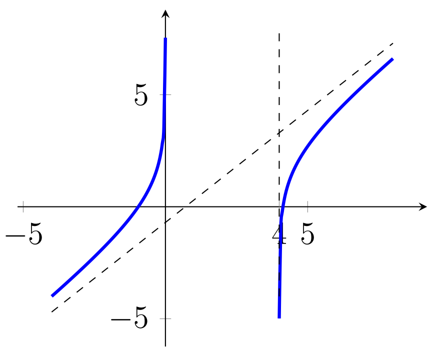
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x}{x-4} \cdot \frac{2x - 2(x-4)}{4x^2} + 1 \\
&= \frac{2x}{x-4} \cdot \frac{2}{x^2} + 1 \\
&= \frac{4x + (x-4)x^2}{(x-4)x^2} \\
&= \frac{(x-2)^2}{(x-4)x}
\end{aligned}$$

Dérivée seconde

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{2(x-2).x(x-4) - (x-2)^2.(2x-4)}{x^2(x-4)^2} \\
&= \frac{2(x-2).\left[x(x-4) - (x-2)^2\right]}{x^2(x-4)^2} \\
&= \frac{2(x-2).(-4)}{x^2(4-x)^2} = \frac{8(2-x)}{x^2(4-x)^2}
\end{aligned}$$

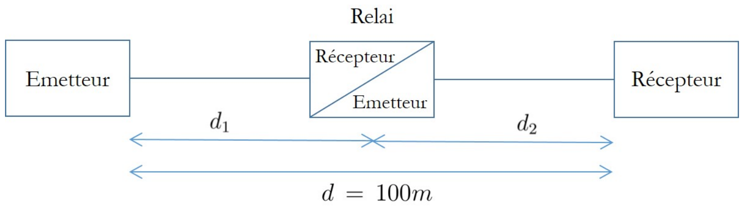
Tableau de synthèse

x	$-\infty$ 0		4 $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $+\infty$		$+\infty$ $+$
$f''(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$-\infty$ $\cup\nearrow$ $+\infty$		$-\infty$ $\cap\nearrow$ $+\infty$



Question 3 (ANA16-14)

Un Ingénieur de l'UMONS souhaite mettre en place un système de transmission sans fil pour couvrir une distance $d = 100m$. La transmission ne pouvant être réalisée de manière efficace en un seul 'saut', on envisage d'utiliser des 'relais de transmission' R répartis uniformément (la transmission est donc réalisée en plusieurs 'sauts'). Chacun des relais comporte une partie "Récepteur" permettant de récupérer le signal émis et une partie "Emetteur" permettant de transmettre le signal à nouveau. La figure ci-dessous illustre le cas où 1 relai de transmission est utilisé (avec $d_1 = d_2$).



Sachant que l'énergie nécessaire
- pour un récepteur, pour recevoir un signal, vaut P_r = constante = 1000 ;
- pour un émetteur, pour transmettre un signal sur une distance d_i, vaut $P_e(d_i) = {d_i}^2$ (où d_i exprimé en $[m]$),

1) déterminez l'énergie totale requise pour réaliser une transmission en 1 seul 'saut' ;
2) déterminez le nombre de relais qui minimise la consommation énergétique du système de transmission complet.

Solution 3 (ANA16-14)

1) Transmission en 1 saut ($d = 100m$) $\rightarrow$ l'énergie totale $P_t = P_e + P_r$
- $P_e = 100^2$
- $P_r = 1000$

$\Rightarrow P_t = 11000$

2) Soit N, le nombre de relais. On peut exprimer :
- la distance entre les relais : $d_i = d/(N+1)$

– l'énergie totale de transmission : $P_t = (N+1)P_e + (N+1)P_r$
avec
  – $P_e = d_i^2 = (d/(N+1))^2$
  – $P_r = 1000$

$\Rightarrow P_t = d^2/(N+1) + (N+1).1000$

Le nombre de relais qui minimise la consommation énergétique est obtenu par :

$$\frac{dP_t}{dN} = \frac{-d^2}{(N+1)^2} + 1000 = 0 \tag{1}$$

$$\rightarrow (N+1)^2 = \frac{d^2}{1000} \tag{2}$$

$$\rightarrow N = \sqrt{\frac{d^2}{1000}} - 1 = \frac{d\sqrt{10}}{100} - 1 \tag{3}$$

Avec $d = 100 \rightarrow N_{optimum} = \sqrt{10} - 1 \approx 2,2$
$\Rightarrow N_{optimum} = 2$ ou $N_{optimum} = 3$

Comme N doit être entier, on évalue la consommation énergétique pour $N = 2$ et $N = 3$
– $P_{t(N=2)} = 100^2/(2+1)) + 3.1000 = 6333$
– $P_{t(N=3)} = 100^2/(3+1)) + 4.1000 = 6500$

$\rightarrow N_{optimum} = 2$. On vérifie en outre qu'il s'agit bien d'un minimum.

$\Rightarrow$ Pour minimiser la consommation énergétique, le système requière donc 2 relais de transmission (transmission en 3 sauts).

Question 4 (AN16-05)

Soient $f_1(x) = \ln x$ et $f_2(x) = \ln(ax)$ avec $a > 1$. Déterminez la valeur de a afin que l'aire comprise entre les deux courbes pour $x \in [1,2]$ soit égale à la moitié de celle comprise entre $f_2(x)$ et l'axe x pour $x \in [1,2]$.

Solution 4 (ANA16-05)

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = x\,(\ln x - 1)$$
$$\int \ln(ax)\;\mathrm{d}x = x\,(\ln(ax) - 1)$$

Ce dernier résultat s'obtient en intégrant par parties. En posant $y = ax$:

$$\int \ln(ax)\;\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a}\ln y \,\mathrm{d}y = \frac{1}{a}\,y\,(\ln y - 1) = x\,(\ln(ax) - 1)$$

L'aire sous-tendue par $f_2(x)$ entre $x = 1$ et $x = 2$ s'écrit :

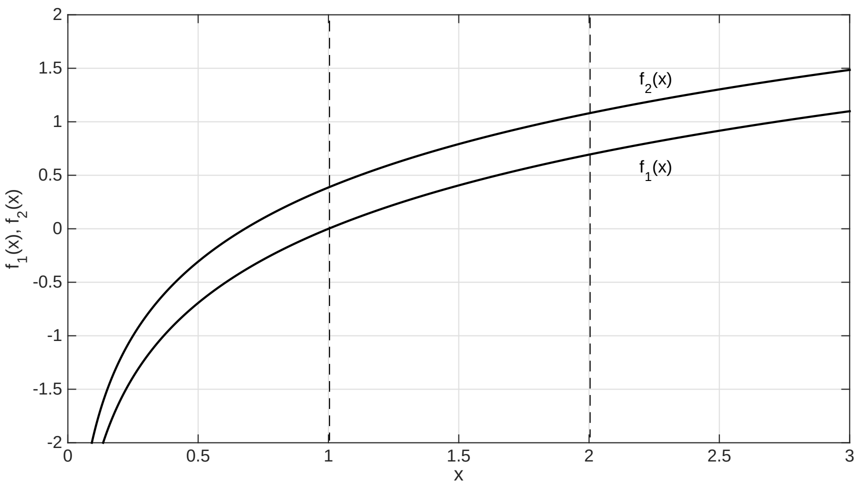
$$\begin{aligned} A_2 &= \int_1^2 \ln(ax)\;\mathrm{d}x = \left[x\,(\ln(ax) - 1)\right]_1^2 \\ &= 2\,(\ln(2a) - 1) - (\ln a - 1) \\ &= \ln a + 2\ln 2 - 1 \end{aligned}$$

L'aire comprise entre les deux courbes s'écrit :

$$\begin{aligned} A_{12} &= \int_1^2 \ln(ax)\;\mathrm{d}x - \int_1^2 \ln x \,\mathrm{d}x \\ &= \left[x\,(\ln(ax) - 1)\right]_1^2 - \left[x\,(\ln x - 1)\right]_1^2 \\ &= \ln a \end{aligned}$$

La condition sur a s'exprime par :

$$\begin{aligned} \ln a &= \frac{1}{2}\,(\ln a + 2\ln 2 - 1) \\ \ln a &= 2\ln 2 - 1 \\ a &= e^{(2\ln 2 - 1)} \\ &= e^{\ln 4}\,e^{-1} \\ &= \frac{4}{e} \end{aligned}$$



Question 5 (ANA16-12)

Etudier la fonction :

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$$

Solution 5 (ANA16-12)

– Domaine : $x \in \,]-\infty, -1] \quad \cup \quad]2, +\infty[$

– Parité : la fonction n'est ni paire, ni impaire

– A.H : /
– A.O : $y = ax + b$

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} = 1$$

$$\begin{aligned}
b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = & \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} - 1\right) \\
= & \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(\frac{x+1}{x-2} - 1\right)}{\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} + 1} \\
= & \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(\frac{x+1-(x-2)}{x-2}\right)}{\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} + 1} \\
= & \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3x}{x-2}}{\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} + 1} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$\rightarrow y = x + \frac{3}{2}$

– $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) = & \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} + x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}}\frac{(x-2)-(x+1)}{(x-2)^2} \\
= & \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} + \frac{-3x}{2(x-2)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}} \\
= & \frac{\frac{x+1}{x-2}(x-2)^2 - \frac{3}{2}x}{(x-2)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}} \\
= & \frac{x^2 + x - 2x - 2 - \frac{3}{2}x}{(x-2)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}} \\
= & \frac{x^2 - \frac{5}{2}x - 2}{(x-2)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}}
\end{aligned}$$

Le dénominateur est toujours positif (ou égal à 0). Les racines du numérateur sont $\frac{5\pm\sqrt{57}}{4}$ ($\approx -0,64$ et $\approx 3,14$).

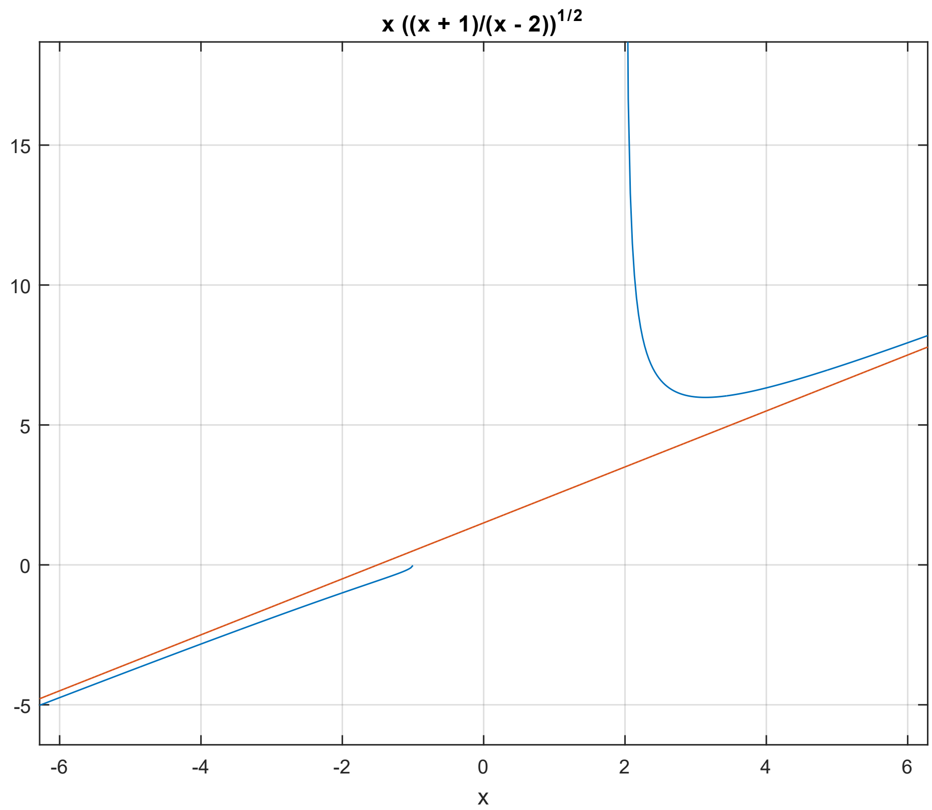
$f'(x)$		-1		-0,64		2		3,14	
$x^2-\frac{5}{2}x-2$	$+$	$+$	/	/	/	/	$-$	0	$+$
$(x-2)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$	$+$	0	/	/	/	/	$+$	$+$	$+$
	$+$	/	/	/	/	/	$-$	0	$+$

– $f''(x)$:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{x^2-\frac{5}{2}x-2}{\sqrt{x+1}\,(x-2)^{3/2}}\right)' = \frac{f'g-g'f}{g^2}\\
g^2 =& (x+1)(x-2)^3\\
f'g =& (2x-\frac{5}{2})\sqrt{x+1}(x-2)^{3/2}\\
fg' =& (x^2-\frac{5}{2}x-2)\left(\sqrt{x+1}\frac{3}{2}\sqrt{x-2}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,(x-2)^{3/2}\right)\\
=& (x^2-\frac{5}{2}x-2)\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}\Big(3\,(x+1)+(x-2)\Big)\right)\\
=& (x^2-\frac{5}{2}x-2)\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}(4x+1)\right)\\
f'g-g'f =& \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}\left(\left((x+1)(x-2)(2x-\frac{5}{2})\right)-\left((x^2-\frac{5}{2}x-2)(2x+\frac{1}{2})\right)\right)\\
=& \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}\left(\frac{15}{4}x+6\right)\\
\frac{f'g-g'f}{g^2} =& \frac{\left(\frac{15}{4}x+6\right)}{(x+1)^{3/2}(x-2)^{5/2}}
\end{aligned}
$$

Le dénominateur est toujours positif (ou égal à 0).

$f''(x)$		$-\frac{8}{5}$		-1		2	
$\frac{15}{4}x+6$	$-$	0	$+$	$+$	/	/	$+$
$(x+1)^{3/2}(x-2)^{5/2}$	$+$	$+$	$+$	0	/	0	$+$
	$-$	0	$+$	/	/	/	$+$



Question 6 (ANA16-04)

Réaliser l'étude complète de la fonction suivante :

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

Solution 6 (ANA16-04)

- Le domaine de définition de la fonction est $\mathbb{R}$.
- La fonction s'annule en $x = 0$
- La fonction est impaire : $f(-x) = -xe^{-x^2/2} = -f(x)$
- Limites :

$$lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2/2} = \frac{+\infty}{+\infty} = lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x^2/2}x} = 0^+$$

  Nous avons une asymptote horizontale en $+\infty$ A.H. :$y = 0^+$

$$lim_{x\to-\infty} xe^{-x^2/2} = \frac{-\infty}{+\infty} = lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{x^2/2}x} = 0^-$$

Nous avons une asymptote horizontale en $-\infty$ A.H. :$y = 0^-$

– Dérivée première

$$f'(x) = \frac{1.e^{x^2/2} - x.x.e^{x^2/2}}{e^{x^2/2}e^{x^2/2}} = (1-x^2)e^{-x^2/2}$$

Les zéros de $f'(x)$ sont : $1-x^2 = 0$ soit $x = \pm 1$. $f'(x)$ est positive entre 0 et 1 ; $f(x)$ sera croissante entre 0 et 1. Elle passe par un maximum en 1 et est ensuite décroissante (même démarche pour les x négatifs - fonction impaire)

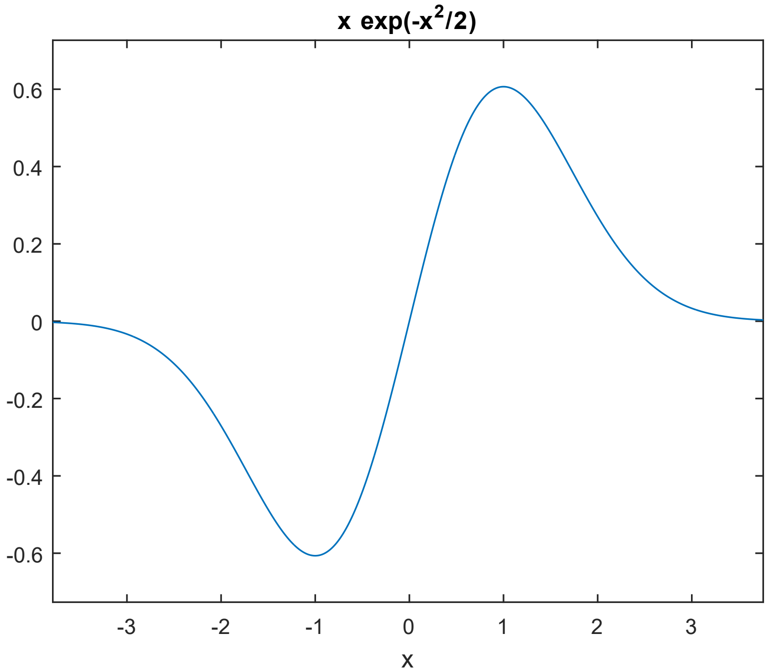
– Dérivée seconde :

$$f''(x) = \frac{-2x.e^{x^2/2} - (1-x^2).x.e^{x^2/2}}{e^{x^2/2}e^{x^2/2}} = \frac{x(x^2-3)}{e^{x^2/2}}$$

Les zéros de $f''(x)$ sont : $x = 0$ et $x^2 - 3 = 0$ soit $x = \pm\sqrt{3} = \pm 1.73$. Il y a donc trois points d'inflexion.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	0^-		-0.39		-0.61		0		0.61		0.39		0^+
y''		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	



Question 7 (ANA16-03)

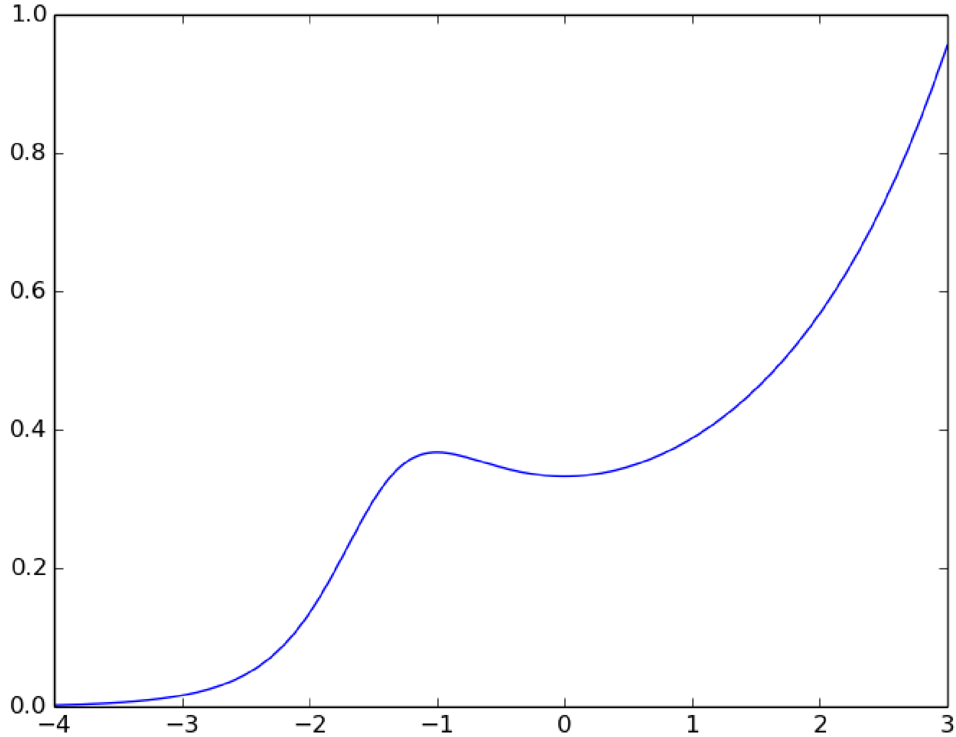
Avec le réchauffement de la planète, les Boréliens, habitants de l'île de Borel au plein milieu de l'océan Pacifique, sont relativement inquiets. En effet, la montée des eaux risque de noyer la vallée dans laquelle ils sont nombreux à habiter, au pied d'un volcan. Des ingénieurs des Mines et Géologues de l'UMONS ont fait un relevé d'altitudes, en partant de grandes profondeurs à l'ouest jusqu'au bord du cratère du volcan à l'est. Par calculs, ils obtiennent que le profil l'île peut être suffisamment bien représenté par la fonction $y(x)$ où x et y sont exprimés en mètres :

$$y(x) = \frac{e^x}{x^2 + 3x + 3}$$

- Représenter précisément cette fonction, sans rechercher les racines de la dérivée seconde.
- En supposant le niveau actuel des eaux à 0 mètres, déterminer la hauteur maximale de montée des eaux avant que la vallée ne soit inondée.

Solution 7 (ANA16-03)

Puisque le dénominateur ne s'annule jamais, la fonction a pour domaine $\mathbb{R}$.
Il y a une asymptote horizontale $y = 0$ quand $x \to -\infty$.
La dérivée première $f'(x) = \dfrac{e^x.x.(1+x)}{(3+3x+x^2)^2}$ s'annule en $x = 0$ et $x = -1$. Elle est négative entre les racines et positive ailleurs.
La dérivée seconde $f''(x) = \dfrac{e^x(3+6x+3x^2+2x^3+x^4)}{(3+3x+x^2)^3}$ est bien négative en $x = -1$ et positive en $x = 0$. Comme $\lim_{x\to-\infty} f''(x) < 0$, il existe certainement un point d'inflexion de $f(x)$ à gauche de $x = -1$ et un autre entre $x = -1$ et $x = 0$.



L'eau peut donc monter de $f(-1) = e^{-1}$ mètres.

Question 8 (ANA16-16)

Calculez

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-3}^{3} |x| \sqrt{4-|x|}\, \mathrm{d}x \\ I_2 &= \int_{-3}^{3} x \sqrt{4-|x|}\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Solution 8 (ANA16-16)

a) Condition d'existence sur les fonctions : $-4 \leq x \leq 4$
$\rightarrow$ Les bornes d'intégration appartiennent au domaine.

b) Calcul de I_1 :

$$\begin{aligned} |x|\,\sqrt{4-|x|} &= x\,\sqrt{4-x} \qquad si\ x \geq 0 \\ &= -x\,\sqrt{4+x} \qquad si\ x < 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ La fonction est paire ($f(x) = f(-x)$) et les bornes d'intégration symétriques. On obtient donc :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-3}^{3} |x|\,\sqrt{4-|x|}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{0}^{3} x\,\sqrt{4-x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

En posant $t = 4 - x \ \rightarrow \ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_1 &= -2\int_{4}^{1} (4-t)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\ &= -2\int_{4}^{1} 4\sqrt{t} - t^{3/2}\,\mathrm{d}t \\ &= -2\left[4\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{2}{5}t^{5/2}\right]_4^1 \\ &= -2\left[4\frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \left(4\frac{2}{3}8 - \frac{2}{5}32\right)\right] \\ &= -2\left(-\frac{280}{15} + \frac{186}{15}\right) \\ &= 188/15 \end{aligned}$$

c) Calcul de I_2 :

$$\begin{aligned} x\,\sqrt{4-|x|} &= x\,\sqrt{4-x} \qquad si\ x \geq 0 \\ &= x\,\sqrt{4+x}\ si\ x < 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ La fonction est impaire ($f(x) = -f(-x)$) et les bornes d'intégration symétriques.
$\Rightarrow$ On obtient donc $I_2 = 0$.

UNIVERSITE DE MONS - FACULTE POLYTECHNIQUE

Examen d'admission 2015

Partie Algèbre

Question 1 (ALG15-7)

Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{\sqrt{(x-a)x^5}}{x^2} \leq \sqrt{2}$$

avec a un paramètre réel.

Solution 1 (ALG15-7)

Les conditions d'existence s'écrivent :

$$x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$
$$(x-a)x^5 \geq 0$$

Pour la seconde condition, trois cas se présentent à nous :

- $a < 0$

x	$-\infty$		a		0		$+\infty$
$(x-a)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x^5		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$(x-a)x^5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow x \leq a$ et $x > 0$

- $a = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(x-a)$		$-$	0	$+$	
x^5		$-$	0	$+$	
$(x-a)x^5$		$+$	0	$+$	

$\Rightarrow x \neq 0$

- $a > 0$

x	$-\infty$		0		a		$+\infty$
$(x-a)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
x^5		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$(x-a)x^5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow x < 0$ et $x \geq a$

En élevant les termes au carré, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{(x-a)x^5}}{x^2} \leq \sqrt{2}\\
&\frac{(x-a)x^5}{x^4} \leq 2\\
&(x-a)x \leq 2\\
&x^2 - ax - 2 \leq 0
\end{aligned}$$

Les racines de $x^2 - ax - 2$ sont $x = \frac{a-\sqrt{a^2+8}}{2}$ et $x = \frac{a+\sqrt{a^2+8}}{2}$.

Dès lors, les solutions de $\frac{\sqrt{(x-a)x^5}}{x^2} \leq \sqrt{2}$ sont données par :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a < 0} \qquad S = \left[\frac{a-\sqrt{a^2+8}}{2}, a\right] \cup \left]0, \frac{a+\sqrt{a^2+8}}{2}\right]\\
&\mathbf{a = 0} \qquad S = \left[-\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]0, \sqrt{2}\right]\\
&\mathbf{a > 0} \qquad S = \left[\frac{a-\sqrt{a^2+8}}{2}, 0\right[\cup \left[a, \frac{a+\sqrt{a^2+8}}{2}\right]
\end{aligned}$$

Question 2 (ALG15-12)

Soit $P(x)$, le polynôme $ax^2 + bx - 4$. Le reste de la division de ce polynôme par $(x-1)$ vaut 12. Sachant que ce polynôme est divisible par $(x+2)$, calculez a, b et les racines de $P(x)$.

Solution 2 (ALG15-12)

Puisque le reste de la division de $P(x)$ par $(x-1)$ vaut 12, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x-1)\,Q(x) + 12 && (1)\\
P(1) &= 12 && (2)\\
a + b - 4 &= 12 && (3)\\
a + b &= 16 && (4)
\end{aligned}$$

$P(x)$ étant divisible par $(x+2)$, on a :

$$P(-2) = 0 \tag{5}$$
$$4a - 2b - 4 = 0 \tag{6}$$
$$2a - b = 2 \tag{7}$$

En additionnant (4) et (7), on obtient :

$$3a = 18$$
$$a = 6$$

On déduit alors que $b = 10$.

La première racine $x = -2$ est donnée dans l'énoncé. La division du polynôme $P(x)$ par $(x+2)$ donne $(6x-2)$. La seconde racine est donc $x = \frac{1}{3}$.

Question 3 (ALG15-16)

Discuter du domaine de définition de $f(x)$ en fonction du paramètre k :

$$f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{kx^2+2x+e}{ex+e}\right)}$$

N.B. : $e \approx 2,7$

Solution 3 (ALG15-16)

Conditions d'existence :

$$x \neq -1 \quad \text{et} \quad \frac{kx^2+2x+e}{ex+e} \geq 1$$

$\boxed{\text{Si } x > -1}$

$$kx^2 + 2x + e \geq ex + e$$
$$kx^2 + (2-e)\,x \geq 0$$
$$x\,(kx + (2-e)) \geq 0$$

– Si $k > 0$:

	0		$\frac{e-2}{k}$	
$+$	0	-	0	$+$

$$\rightarrow \text{dom} f = \left]-1, 0\right] \cup \left[\frac{e-2}{k}, \infty\right[$$

– Si $k < 0$:

	$\frac{e-2}{k}$		0	
-	0	$+$	0	-

$$\rightarrow \text{dom} f = [\alpha, 0] \text{ avec } \alpha = \max\left(-1, \frac{e-2}{k}\right)$$

– Si $k = 0$:

$$x(2-e) \geq 0 \qquad \rightarrow \text{dom} f = \left]-1, 0\right]$$

$\boxed{\text{Si } x < -1}$

$$x\left(kx + (2-e)\right) \leq 0$$

– Si $k > 0$:

	0		$\frac{e-2}{k}$	
$+$	0	-	0	$+$

$$\rightarrow \text{dom} f = \varnothing \text{ (car } x < -1)$$

– Si $k < 0$:

	$\frac{e-2}{k}$		0	
-	0	$+$	0	-

$$\rightarrow \text{dom} f = \left]-\infty, \beta\right] \text{ avec } \beta = \min\left(-1, \frac{e-2}{k}\right)$$

– Si $k = 0$:

$$x(2-e) \leq 0 \qquad \rightarrow \text{dom} f = \varnothing \text{ (car } x < -1)$$

Au final :
– $k = 0 \rightarrow \text{dom} f = \left]-1, 0\right]$
– $k > 0 \rightarrow \text{dom} f = \left]-1, 0\right] \cup \left[\frac{e-2}{k}, \infty\right[$
– $k < 0 \rightarrow \text{dom} f = \left]-\infty, \beta\right] \cup [\alpha, 0]$

Question 4 (ALG15-1)

Etudier dans $\mathbb{R}$ et en fonction du paramètre a le nombre et le signe des racines de l'équation :

$$x^2 - x\sqrt{2} + \ln a = 0$$

Solution 4 (ALG15-1)

1) Conditions d'existence : $a > 0$

2) Les racines valent :

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4\ln a}}{2}$$

Les racines sont réelles pour

$$2 - 4\ln a \geq 0 \Rightarrow a \leq \sqrt{e}$$

Donc : $0 < a \leq \sqrt{e}$

3) Infos sur le signe des racines $\Rightarrow$ la somme S et le produit P des racines valent :

$S = \sqrt{2}$

$P = \ln a$

$\Rightarrow P < 0$ pour $x \in]0, 1[$
$\Rightarrow P \geq 0$ pour $x \in [1, \sqrt{e}]$

Il en résulte que :

a) Si $0 < a < 1$: $S > 0$ et $P < 0 \Rightarrow$ 2 racines de signes opposés

b) Si $a = 1$: $S > 0$ et $P = 0 \Rightarrow$ les deux racines valent $x_1 = 0$ et $x_2 = \sqrt{2}$

c) Si $1 < a < \sqrt{e}$: $S > 0$ et $P > 0 \Rightarrow$ 2 racines positives

d) Si $a = \sqrt{e} \Rightarrow$ racines doubles $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Question 5 (ALG15-8)

Soit a un paramètre réel non nul, on vous demande de résoudre et discuter l'équation suivante :

$$(2\,a\,y - 5)\cdot\left[2015\,\left((a+2)\,x + 4\,y - 3\right)^2 + 1815\,\left(x + (a-1)\,y + 3\right)^2\right] = 0\,.$$

Solution 5 (ALG15-8)

Pour le premier facteur :

$$2ay - 5 = 0 \quad => \quad y = \frac{5}{2a}$$

Ce qui donne

$$S = S_1 = \left\{ \left(x,\, \frac{5}{2a} \right),\, x \in \mathbb{R} \right\}$$

Le deuxième facteur fournit un système de deux equations à deux inconnues. En effet, la somme de deux carrés ne peut être nulle que si chacun des deux nombres élevés au carré est nul.

$$\begin{cases} (a+2)\,x + 4y = 3 \\ x + (a-1)\,y = -3 \end{cases}$$

Le déterminant vaut $\mathcal{D} = a^2 + a - 6 = (a-2)(a+3)$.

Si $a = 2$,

$$\begin{cases} 4\,x + 4y = 3 \\ x + y = -3 \end{cases}$$

Le système est impossible : $S_2 = \phi$, $S = S_1$

Si $a = -3$,

$$\begin{cases} -\,x + 4y = 3 \\ x - 4y = -3 \end{cases}$$

Le système est indéterminé : $S_2 = \{(4\,x - 3, x)\,,\, x \in \mathbb{R}\}$, $S = S_1 \cup S_2$.

Si $a \neq \{2, -3\}$

$$\begin{cases} (a+2)\,x + 4y = 3 \\ x + (a-1)\,y = -3 \end{cases}$$

$S_2 = \left\{ \left(\frac{3}{a-2}, \frac{-3}{a-2} \right) \right\}$, $S = S_1 \cup S_2$

Question 6 (ALG15-9)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et discuter en fonction du paramètre réel m le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ \sqrt{xy} = m - x - y \end{cases}$$

Solution 6 (ALG15-9)

Les conditions d'existence sont

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0 \qquad m \geq x + y$$

En posant $X = \sqrt{x}$ et $Y = \sqrt{y}$, le système devient :

$$\begin{cases} Y = 1 - X \\ XY = m - X^2 - Y^2 \end{cases}$$

En combinant ces deux équations, on obtient

$$X^2 - X - (m-1) = 0,$$

qui a pour solutions

$$X_1 = \frac{1 + \sqrt{4m-3}}{2} \qquad \text{et } X_2 = \frac{1 - \sqrt{4m-3}}{2}$$

et les valeurs correspondantes (symétriques) pour Y :

$$Y_1 = \frac{1 - \sqrt{4m-3}}{2} \qquad \text{et } Y_2 = \frac{1 + \sqrt{4m-3}}{2}$$

Sous la condition $m \geq \frac{3}{4}$, cela donne

$$x_1 = \frac{2m - 1 + \sqrt{4m-3}}{2} \qquad \text{et } x_2 = \frac{2m - 1 - \sqrt{4m-3}}{2}$$

et

$$y_1 = \frac{2m - 1 - \sqrt{4m-3}}{2} \qquad \text{et } y_2 = \frac{2m - 1 + \sqrt{4m-3}}{2}$$

En regroupant les conditions d'existence, ces racines sont donc réelles si

$$\frac{3}{4} \leq m \leq 1.$$

Question 7 (ALG15-20)

Résoudre le système d'équations suivant dans les réels

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & m\,y & + & m^2\,z & = & 2m \\ m\,x & - & m^2\,y & + & m\,z & = & 2m \\ m\,x & + & y & - & m^2\,z & = & 1-m \end{array}\right.$$

où m est un paramètre réel.

Solution 7 (ALG15-20)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^2 \end{vmatrix} = m(m-1)(m+1)(1+m^2)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2m & -m & m^2 \\ 2m & -m^2 & m \\ 1-m & 1 & -m^2 \end{vmatrix} = m^2(m-1)(m^2+3)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2m & m^2 \\ m & 2m & m \\ m & 1-m & -m^2 \end{vmatrix} = -m(m+1)(m-1)^2$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -m & 2m \\ m & -m^2 & 2m \\ m & 1 & 1-m \end{vmatrix} = 2m(m-1)(1+m^2)$$

Discussion

- $m = 0$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ y & = & 1 \end{array}\right.$$

  On tire : $x = 0$ et $y = 1$.
  L'ensemble des solutions est $\{(0, 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

- $m = 1$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y + z & = & 2 \\ x - y + z & = & 2 \\ x + y - z & = & 0 \end{array}\right.$$

La première équation est redondante. En additionnant les deux suivantes, on tire :

$$x = 1 \qquad \text{et} \qquad z = y + 1.$$

L'ensemble des solutions est $\{(1, \alpha, \alpha + 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

- $m = -1$

$$\begin{cases} x + y + z &= -2 \\ -x - y - z &= -2 \\ -x + y + z &= 2 \end{cases}$$

Les deux premières équations sont incompatibles. Le système n'a donc pas de solution dans ce cas.

- $m \neq 0, 1, -1$

Dans ce cas, la solution unique est :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{m(m^2 + 3)}{(m + 1)(1 + m^2)} \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1 - m}{1 + m^2} \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{2}{m + 1}.$$

Question 8 (ALG15-10)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2xy - y^2 - 5y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

Solution 8 (ALG15-10)

En factorisant :

$$\begin{cases} y(2x - y - 5) = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

La première équation donne deux cas :

1. $y = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x = 3$ ou $x = 1$
2. $y \neq 0 \iff \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 2x - 5 = x^2 - 4x + 3 \iff x^2 - 6x + 8 = 0 \iff (x = 4, y = 3) \text{ ou } (x = 2, y = -1) \end{cases}$$

On obtient donc les solutions suivantes

$$\{(1, 0); (3, 0); (4, 3); (2, -1)\}$$

UNIVERSITE DE MONS - FACULTE POLYTECHNIQUE

Examen d'admission 2015

Partie Analyse

Question 1 (ANA15-01)

Etudiez la fonction

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{(x-1)(x+4)}}$$

Solution 1 (ANA15-01)

1. Domaine de définition :
   $\mathrm{dom}(f) : x \in \,]-\infty, -4] \cup [1, +\infty[$
2. Zéros de f : pas dans son domaine de définition
3. Parité : néant, ni paire, ni impaire
4. Asymptotes
   – AH :

   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$, asymptote horizontale

   $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, deuxième asymptote horizontale

   – AV :

   $\lim_{x\to-4^-} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$, asymptote verticale

   $\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$, deuxième asymptote verticale

5. Dérivée première f'

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{3x-8}{((x-1)(x+4))^{\frac{3}{2}}}$$

   Tableau de signe de f' :

x		-4		$+1$		$\frac{8}{3}$	
$f'(x)$	$-$	/		/	$-$	0	$+$

6. Dérivée seconde f'' :

$$f''(x) = \frac{3}{4} \frac{-4x^2 + 13x + 16}{((x-1)(x+4))^{\frac{5}{2}}}$$

Zéros de f'' :

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{425}}{8} = \{4.2\cdots, -0.9\cdots\}$$

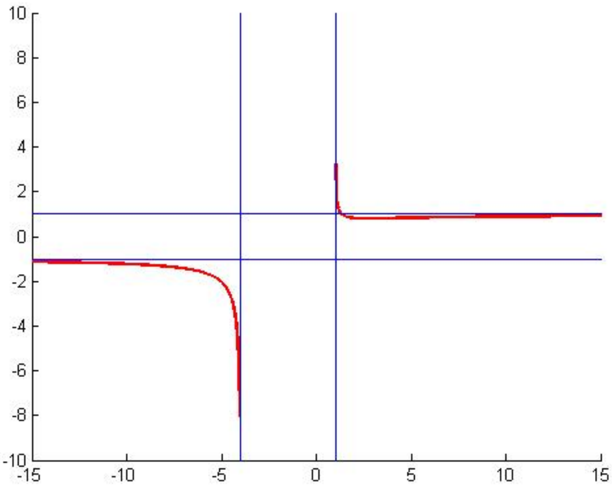
Tableau de signe de f'' :

x		-4		$x_2 = -0.9$		$+1$		$x_1 = 4.2\ldots$	
$f''(x)$	$-$	/	$-$	0		/	$+$	0	$-$

7. Tableau de signe :

x	$-\infty$			-1	4			$\frac{8}{3}$			x_1			$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	$\Vert$	$\Vert$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
y"	$-$	$-$	$-$	$\Vert$	$\Vert$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$			$\downarrow$	$\downarrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
	$\cap$	$\cap$	$\cap$			$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$\cup$		$\cap$	$\cap$	$\cap$
	asH			asV	asV			min			inf			asH

8. Tracé de la fonction :



Question 2 (ANA15-17)

Soit une parabole d'équation $f(x) = ax^2 + bx + c$ dans le plan de repère orthonormé. Sachant que cette parabole passe par l'origine et par le point $A(-3; -3/2)$ et que la tangente à la parabole au point A passe par le point $B(0; -27/2)$, on demande de trouver la position du point P de la parabole telle que la distance entre ce point P et le point $M(0; -4)$ soit minimale.

Solution 2 (ANA15-17)

A) Equation de la Parabole $\mathcal{P}(x) = ax^2 + bx + c$:

1) Points appartenant à la parabole

$*O(0; 0) \in \mathcal{P}(x)$

$\rightarrow c = 0$

$*A(-3; -3/2) \in \mathcal{P}(x)$

$\rightarrow 9a - 3b = -3/2$ (1)

2) Tangente en A passe par B

$t \equiv y = mx + p$

$*m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3/2-(-27/2)}{-3-0} = \frac{24/2}{-3} = -4$

$* - 27/2 = -4.0 + p$

$\rightarrow p = -27/2$

$\Rightarrow t \equiv y = -4x - 27/2$

3) Dérivée de $\mathcal{P}$ en A égale m

$\mathcal{P}'(x) = 2ax + b$

$\mathcal{P}'(-3) = 2a(-3) + b = m = -4$

$\rightarrow -6a + b = -4$ (2)

$\Rightarrow$ (2) dans (1) donne :

$9a - 3(6a - 4) = -3/2 \rightarrow -9a = -27/2 \rightarrow a = 3/2$

$b = 6.(3/2) - 4 = 5$

$\Rightarrow \mathcal{P}(x) = 3/2x^2 + 5x$

B) Soit $f(x)$ la distance entre le point $M(0; -4)$ et la parabole $\mathcal{P}$

$$f(x) = |M\mathcal{P}(x)| = \sqrt{(x-0)^2 + (3/2x^2 + 5x - (-4))^2}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 9/4x^4 + 25x^2 + 15x^3 + 16 + 12x^2 + 40x}$$

$$f(x) = \sqrt{9/4x^4 + 15x^3 + 38x^2 + 40x + 16}$$

$\rightarrow f(x)$ est à minimiser : $f'(x) = 0$

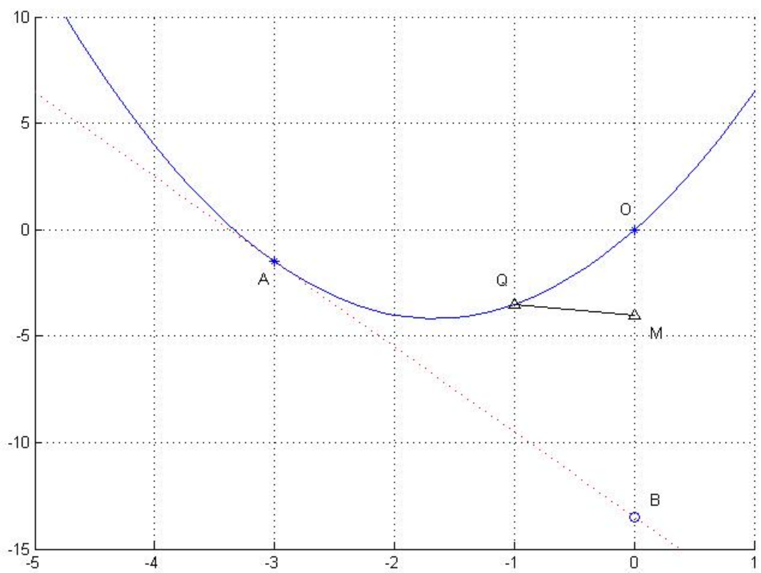
$$9x^3 + 45x^2 + 76x + 40 = 0$$

$$(x+1)(9x^2 + 36x + 40) = 0$$

$\rightarrow$ Seul solution : $x = -1$

$\Rightarrow$ Coordonnées du point Q : $Q(-1, \mathcal{P}(-1)) \rightarrow Q(-1, -7/2)$

$\Rightarrow |M\mathcal{P}|_{min} = |MQ| = \sqrt{5}/2$



(Pour illustration)

Question 3 (ANA15-22)

Effectuez l'analyse de la fonction $f(x)$ suivante et faites-en une représentation graphique soignée.

$$f(x) = (\ln(x) - 1)\ \ln(x)\,.$$

Solution 3 (ANA15-22) :

– Le domaine de $f(x)$ est $\mathcal{D} = \left\{\, x \in \mathbb{R}_0^+ \right\}$.
– La fonction n'est ni paire ni impaire.
– Deux racines sont facilement obtenues : $x = 1$, $x = e$.
– Une asymptote verticale existe :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \cdot -\infty = +\infty$$

– Il n'y a pas d'asymptote horizontale :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \cdot +\infty = +\infty$$

– il n'y a pas d'asymptote oblique :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,(\ln(x) - 1) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2(x) - \ln(x)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2(x) - \ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(x)\frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(x) - 1}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(x) - 1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$$

– le tableau de signe de la fonction est :

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$\ln(x)-1$	$\Vert$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

– La dérivée de la fonction est $f'(x) = \frac{2\ln(x)-1}{x}$, elle s'annule en $x = \sqrt{e} \approx 1.6$

– les variations de signe de f' sont reprises au tableau suivant :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
x	0	$+$	$+$	$+$	
$2\ln(x)-1$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

– La dérivée seconde de la fonction est $f''(x) = \frac{3-2\ln(x)}{x^2}$, elle s'annule en $x = \sqrt{e^3}$

– les variations de signe de f'' sont reprises au tableau suivant :

x	0		$\sqrt{e^3}$		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

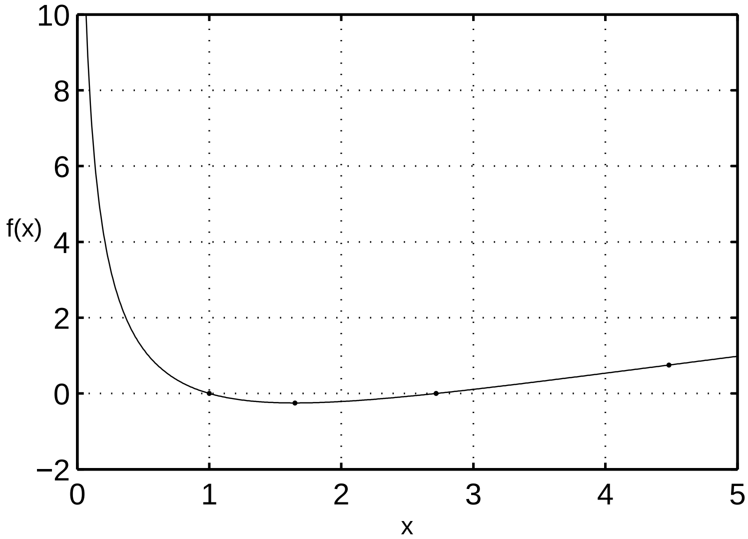
– on note un point d'inflexion en $x = \sqrt{e^3} \approx 4.5$

– le graphe de la fonction est fourni à la figure suivante :

– deux points particuliers aident à la construction du graphique :

$$f(\sqrt{e^3}) = 3/4$$

$$f(\sqrt{e}) = -1/4$$

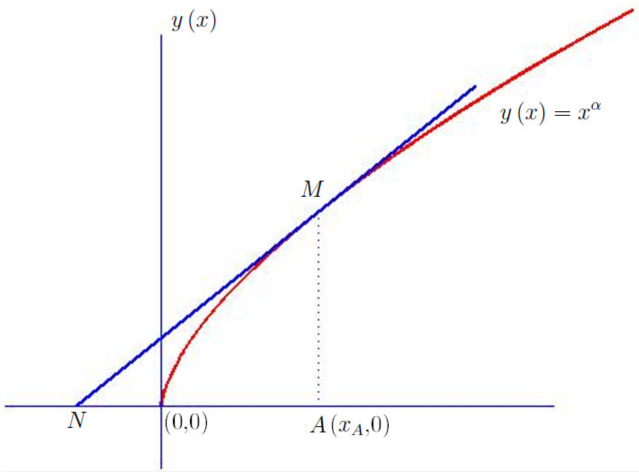


Question 4 (ANA15-02)

Soit la fonction

$$y(x) = x^{\alpha} \quad \text{avec } 0 < \alpha < 1 \text{ et } x \geq 0 \tag{1}$$

représentée ci-dessous pour une valeur de α respectant (1).



La tangente à la courbe ci-dessus au point M d'abscisse x_A coupe l'axe des abscisses au point N. On demande de calculer la valeur de

α de telle sorte que l'aire sous-tendue par $y(x)$ entre les abscisses 0 et x_A soit égale à la moitié de l'aire du triangle AMN.

Solution 4 (ANA15-02)

L'aire S_1 sous-tendue par $y(x)$ entre les abscisses 0 et x_A vaut

$$S_1 = \int_0^{x_A} x^\alpha \mathrm{d}t = \frac{x_A^{\alpha+1}}{\alpha+1} \tag{2}$$

La tangente MN a pour équation

$$y - x_A^\alpha = \alpha x_A^{\alpha-1}(x - x_A) \tag{3}$$

Son intersection avec l'axe des abscisses est en

$$x_N = x_A - \frac{x_A^\alpha}{\alpha x_A^{\alpha-1}} = x_A\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \tag{4}$$

L'aire S_2 du triangle AMN vaut donc

$$S_2 = \frac{1}{2}x_A^\alpha(x_A - x_N) = \frac{x_A^{\alpha+1}}{2\alpha} \tag{5}$$

Il en résulte que $S_1 = \frac{1}{2}S_2$ si

$$\frac{1}{\alpha+1} = \frac{1}{4\alpha} \tag{6}$$

c'est-à-dire si $\alpha = \frac{1}{3}$.

Question 5 (ANA15-11)

Soient I_1 et I_2 les primitives définies par :

$$I_1 = \int \frac{e^x}{(e^x + e^{-x})}dx \qquad I_2 = \int \frac{1}{e^x\,(e^x + e^{-x})}dx.$$

En vous basant sur le calcul de $I_1 + I_2$ et de $I_1 - I_2$,
déterminez I_1 et I_2.

Solution 5 (ANA15-11)

– $I_1 + I_2$:

$$I_1 + I_2 = \int \left(\frac{e^x}{e^x + e^{-x}} + \frac{1}{e^x \left(e^x + e^{-x}\right)} \right) dx \tag{7}$$

$$= \int \left(\frac{e^x}{e^x + e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) dx \tag{8}$$

$$= \int 1dx \tag{9}$$

$$= x + C \tag{10}$$

– $I_1 - I_2$:

$$I_1 - I_2 = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

En posant $u = e^x + e^{-x}$, on a : $du = \left(e^x - e^{-x}\right) dx$, et on déduit :

$$I_1 - I_2 = \int \frac{1}{u} du \tag{11}$$

$$= \ln(u) + C \tag{12}$$

$$= \ln(e^x + e^{-x}) + C \tag{13}$$

En faisant (10) + (13), on a :

$$\begin{aligned} 2\ I_1 &= x + \ln(e^x + e^{-x}) + C \\ I_1 &= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln(e^x + e^{-x}) + C \\ &= \frac{1}{2} \big(\ln e^x + \ln(e^x + e^{-x})\big) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(e^{2x} + 1\right) + C_1 \end{aligned}$$

Grâce à (10), on déduit :

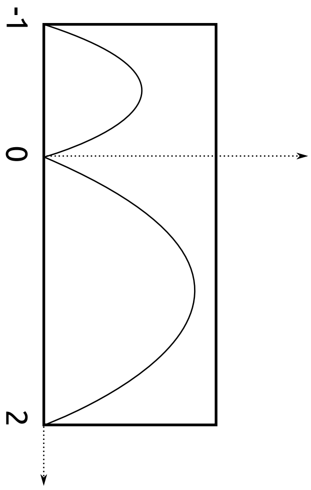
$$\begin{aligned} I_2 &= x - I_1 + C \\ &= x - \frac{1}{2} \ln \left(e^{2x} + 1\right) + C \\ &= -\frac{1}{2} \left(\ln e^{-2x} + \ln \left(e^{2x} + 1\right)\right) + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left(1 + e^{-2x}\right) + C_2 \end{aligned}$$

Question 6 (ANA15-28)

Un ingénieur informaticien célèbre, Donald K., souhaite définir une nouvelle police de caractères. Pour construire le B majuscule, il se donne un rectangle de 3 u.l. (unités de longueur) verticalement sur 1 u.l. horizontalement. La lettre devra occuper toute la hauteur de ce rectangle. Les 2 lobes seront décrits par des paraboles. Le lobe supérieur possèdera une hauteur et une largeur maximales respectivement égales à la moitié de celles du lobe inférieur. Enfin, l'aire totale intérieure de la lettre sera égale à 4/9 de l'aire du rectangle.

Expliquez comment aider Donald K.

Solution 6 (ANA15-28)



Hauteur des lobes

$$\begin{cases} p_1(x) & = ax(x+1) = a(x^2+x) \\ p_2(x) & = bx(x-2) = b(x^2-2x) \end{cases}$$

Largeur des lobes

$$\begin{cases} p_1(-\frac{1}{2}) & = -\frac{1}{4}a \\ p_2(1) & = -b \end{cases}$$

On en déduit $a = 2b$ et on a :
$-1 \leq b < 0$

Aire totale

$$
\begin{aligned}
2b\int_{-1}^{0}(x^2+x)dx + b\int_{0}^{2}(x^2-2x)dx &= 2b\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + b\left[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\right]_{0}^{2} \\
&= -2b\left[\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}\right] + b\left[\frac{8}{3}-4\right] \\
&= b\left[\frac{-1}{3}+\frac{-4}{3}\right] \\
&= -b\frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

Il faut donc :

$$-b\frac{5}{3} = \frac{4}{9}3 = \frac{4}{3} \rightarrow b = -\frac{4}{3}.\frac{3}{5} = -\frac{4}{5}$$

On déduit : $a = -\frac{8}{5}$

Question 7 (ANA15-08)

Etudiez la fonction

$$f(x) = \frac{\ln|x|+1}{x}$$

Solution 7 (ANA15-8)

Etudiez la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{\ln|x|+1}{x}$$

Domaine de définition : $]-\infty, 0[\ \cup \ ]0, +\infty[$

Parité : f est une fonction impaire :

$$f(-x) = -f(x)$$

Soit $x > 0$ **:**

Racines :

$$f(x) = 0 \ \ si \ \ \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ \ x = \frac{1}{e} \approx 0,3$$

Asymptotes et limites :

$$Pour \;\; x>0 \;\; on \;\; a \;\; f(x)=\frac{\ln(x)+1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) :$$

sachant que :

$$\lim_{x\to 0^+}(1+\ln x)=-\infty$$

et :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

Par produit

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim\left((1+\ln \; x)\frac{1}{x}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) :$$

Sachant que :

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{ln \; x}{x}=0$$

On en déduit que pour tout x strictement positif :

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1+ln \; x}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{ln \; x}{x}+\frac{1}{x}=0+0=0$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$$

Comme $\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$, l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe au voisinage de $+\infty$
Et comme $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe au voisinage de 0

Dérivée première

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}.x-(\ln x+1)}{x^2}=\frac{-\ln \; x}{x^2}$$

$f'(x)=0$ pour $x=1$
étude du signe de $f'(x)$

$$-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<0 \Leftrightarrow x<1$$

Et donc : $f'(x)>0$ pour $x\in]0^+,1[$ et $f'(x)<0$ pour $x\in]1,+\infty[$

Dérivée seconde

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}.x^2 - (-\ln x.2x)}{x^4} = \frac{-x + 2x\ln x}{x^4} = \frac{x\,(2\;ln\;x - 1)}{x^4}$$

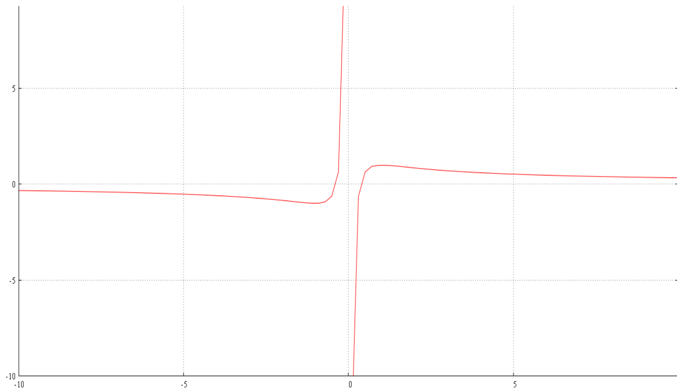
$f''(x) = 0$ pour $x = e^{1/2} = \sqrt{e} =\approx 1,6$
Le point $(1.6, f(1.6))$, c.a.d, le point $(1.6, 0.91)$ est un point d'inflexion

$$f'(x) = \frac{-\ln\;x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{x\,(2\;ln\;x - 1)}{x^4}$$

En récapitulatif, tableau de signes

x	0		0.3		1		1.6		$+\infty$
$f'(x)$	/	+	+	+	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	/	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	+	+
$f(x)$	$-\infty$ A.V.	$\nearrow$	0 racine	$\nearrow$	Max $\bigcap$	$\searrow$	0.91 inflexion	$\searrow$	0^+ A.H.



Question 8 (ANA15-15)

Etudier dans $\mathbb{R}$ la fonction suivante :

$$f(x) = e^{\sqrt{|x-2|}}$$

Question 2 (ANA15-15)

– Domaine : $\mathbb{R}$
– Parité ? non, mais symétrie par rapport à la droite $x = 2$

- Zéros ? aucun
- asymptotes
  - AH : aucune car $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$
  - AV : aucune
  - AO : aucune car $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

signes :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$+$	1	$+$	$+\infty$

- dérivée première
  - si $x > 2$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} e^{\sqrt{x-2}}$
  - si $x < 2$: $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} e^{\sqrt{2-x}}$

signes :

x	$-\infty$		2			$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-	$-\infty$	$+\infty$	$+$	$+\infty$

- dérivée seconde
  - si $x > 2$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(e^{\sqrt{x-2}})'\sqrt{x-2} - e^{\sqrt{x-2}}(\sqrt{x-2})'}{2(x-2)} \\ &= \frac{e^{\sqrt{x-2}}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x-2}})}{2(x-2)} \\ &= e^{\sqrt{x-2}} \frac{\sqrt{x-2}-1}{4(x-2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

qui s'annule pour

$$1 - \sqrt{x-2} = 0 \iff 1 = x-2 \iff x = 3$$

et qui tend vers $-\infty$ en $x = 2$

  - si $x < 2$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{(e^{\sqrt{2-x}})'\sqrt{2-x} - e^{\sqrt{2-x}}(\sqrt{2-x})'}{2(2-x)} \\ &= -\frac{e^{\sqrt{2-x}}(\frac{-1}{2} - \frac{-1}{2\sqrt{2-x}})}{2(2-x)} \\ &= e^{\sqrt{2-x}} \frac{\sqrt{2-x}-1}{4(2-x)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

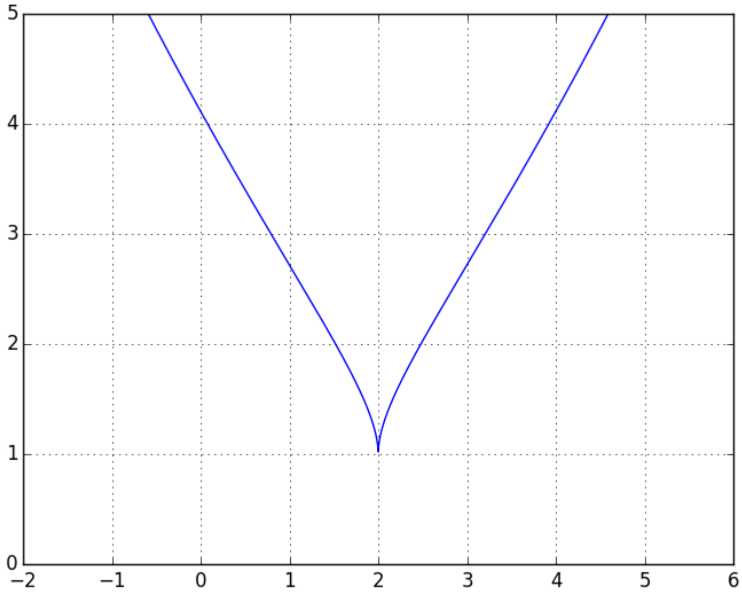
qui s'annule pour

$$1 + \sqrt{2-x} = 0 \iff 1 = 2-x \iff x = 1$$

et qui tend vers $-\infty$ en $x = 2$

signes :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f''(x)$	$+\infty$	$+$	0	-	$-\infty$	-	0	$+$	$+\infty$


0
1
2
3
4
5
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6

UNIVERSITE DE MONS

FACULTE POLYTECHNIQUE

Examen d'admission - Algèbre et Analyse

Groupe B - Mercredi 2 juillet 2014
solutions

Question 1 (ALG14-18)

Pour réaliser deux tâches de calcul, on dispose de deux ordinateurs différents, dont on supposera les vitesses constantes mais pas nécessairement identiques : v_1 et v_2 sont exprimées en pétaFLOP par seconde, où le FLOP – FLoating-point OPeration – est l'unité de mesure de la quantité de travail informatique et péta est un préfixe multiplicatif (1 pétaFLOP/s $= 10^{15}$ opérations par seconde).
Lorsque le premier ordinateur réalise la première tâche et que le second ordinateur réalise la seconde, ils utilisent chacun le même temps. Par contre, pour réaliser l'autre tâche, ils mettent respectivement 9 secondes et 4 secondes pour arriver au bout.
Déterminez la taille des deux tâches (en pétaFLOP) en sachant que la quantité totale de travail est de 60 pétaFLOP. Déterminez aussi la vitesse de chacun des deux ordinateurs.

Question 2 (ANA14-03)

Rechercher l'ensemble des fonctions $f(x)$, définies et dérivables sur $]0;+\infty[$, vérifiant les deux conditions suivantes :

1. pour tout nombre réel x strictement positif,
$$xf'(x) - f(x) = x^2 \mathrm{e}^{2x},$$
2. pour tout nombre réel x strictement positif,
$$g(x) = \frac{f(x)}{x},$$
si $g(x)$ est une fonction définie sur le même intervalle.

Solutions

Question 1 (ALG14-18)

En notant x_1 la taille de la première tâche et x_2 la taille de la seconde, on a que

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 60 \\ \frac{x_1}{v_1} - \frac{x_2}{v_2} &= 0 \\ \frac{x_1}{v_2} &= 9 \\ \frac{x_2}{v_1} &= 4 \end{aligned}$$

En extrayant $x_2 = 60 - x_1$ de la première équation, en exprimant les vitesses à partir des 2 dernières expressions, et en injectant le tout dans la deuxième équation, on obtient, après mise au même dénominateur,

$$\begin{aligned} 4.x_1^2 - 9.(60 - x_1)^2 &= 0 \\ 5.x_1^2 - 2.9.60.x_1 + 9.60^2 &= 0 \end{aligned}$$

Le réalisant de cette équation vaut

$$\begin{aligned} \rho &= (2.9.60)^2 - 4.5.9.60^2 \\ &= 2^2.60^2.9.(9 - 5) \\ &= 2^2.60^2.3^2.2^2 \\ &= (12.60)^2 \end{aligned}$$

et les racines

$$\begin{aligned} x_{1\pm} &= \frac{2.9.60 \pm 2.6.60}{2.5} \\ &= (3 \pm 2).36 \end{aligned}$$

La résolution de cette équation donne deux valeurs pour x_1, soit 180 (qui n'est pas compatible avec la quantité totale) soit 36. En prenant $x_1 = 36$ pétaFLOP, on a que $x_2 = 24$ pétaFLOP. On en déduit que $v_1 = 6\text{pétaFLOP}/s$ et $v_2 = 4\text{pétaFLOP}/s$.

Question 2 (ANA14-03)

La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$.
De plus, pour $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{x \cdot f'(x) - 1 \cdot f(x)}{x^2} = \frac{x^2 \mathrm{e}^{2x}}{x^2} = \mathrm{e}^{2x} \ . \tag{1}$$

Par ailleurs, il existe un réel c tel que, pour tout réel $x > 0$,

$$g(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + c \ . \tag{2}$$

On a donc

$$f(x) = g(x)x = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} + cx \ . \tag{3}$$

La première condition reste bien vérifiée puisque :

$$\begin{align} xf'(x) - f(x) &= x\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{2x} + c\right) - \left(\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} + cx\right) \tag{4}\\ &= \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} + x^2\mathrm{e}^{2x} + cx - \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} + cx \tag{5}\\ &= \mathrm{e}^{2x} \ . \tag{6}\end{align}$$

Les fonctions f vérifiant les deux conditions imposées sont les fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} + cx$$

où c est un réel.

UNIVERSITE DE MONS

FACULTE POLYTECHNIQUE

Examen d'admission - Algèbre et Analyse

Groupe A - Mercredi 2 juillet 2014
Solutions

Question 1 (ALG14-10)

Résoudre l'inégalité suivante :

$$\log_{f(x)}(3x-1) + \log_{g(x)}\sqrt{3x-1} \leq \ln(mx+1)$$

avec m un paramètre réel, et

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = e^{\frac{x}{4x-2}}$$

Discutez en fonction de m.

Question 2 (ANA14-17)

Déterminer la fonction $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
- $f'(x)$ est un polynôme de degré 3
- $f'(x)$ est une fonction impaire
- $f'(x)$ admet une racine en $x = 2$
- $f(\sqrt{2}) = -7$ et $f(4) = 133$

Solutions

Question 1 (ALG14-10)

Les conditions d'existence s'écrivent :

$$\begin{aligned}
&f(x) \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \Rightarrow x \neq 0\\
&g(x) \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \Rightarrow \frac{x}{4x-2} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0\\
&4x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}\\
&3x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}\\
&mx+1 > 0 \Rightarrow x > \frac{-1}{m}
\end{aligned}$$

Nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
&\frac{\ln(3x-1)}{\ln e^x} + \frac{\ln(3x-1)^{\frac{1}{2}}}{\ln e^{\frac{x}{4x-2}}} \leq \ln(mx+1)\\
&\frac{1}{x}\ln(3x-1) + \frac{4x-2}{x}\ln(3x-1)^{\frac{1}{2}} \leq \ln(mx+1)\\
&\ln(3x-1)^{\frac{1}{x}} + \ln(3x-1)^{\frac{1}{2}\frac{4x-2}{x}} \leq \ln(mx+1)\\
&\ln\left[(3x-1)^{\frac{1}{x}}(3x-1)^{\frac{1}{2}\frac{4x-2}{x}}\right] \leq \ln(mx+1)\\
&\ln(3x-1)^{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{4x-2}{x}\right)} \leq \ln(mx+1)\\
&\ln(3x-1)^2 \leq \ln(mx+1)\\
&(3x-1)^2 \leq mx+1\\
&9x^2+1-6x \leq mx+1\\
&9x^2-(m+6)x \leq 0\\
&x(9x-(m+6)) \leq 0
\end{aligned}$$

Les racines de $x(9x-(m+6))$ sont $x=0$ et $x=\frac{m+6}{9}$. Dès lors, les solutions de $x(9x-(m+6)) \leq 0$ sont données par :

$$\begin{aligned}
&x \in \left[0, \frac{m+6}{9}\right] \text{ si } \frac{m+6}{9} > 0 \text{ c.à.d. si } m > -6\\
&x \in \left[\frac{m+6}{9}, 0\right] \text{ si } \frac{m+6}{9} < 0 \text{ c.à.d. si } m < -6\\
&x = 0 \text{ si } m = -6
\end{aligned}$$

En tenant compte de la quatrième condition d'existence :

$$x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{m+6}{9}\right] \text{ si } \frac{m+6}{9} > \frac{1}{3} \text{ c.à.d. si } m > -3$$

En appliquant $m > -3$, la dernière condition d'existence, on trouve $x > \frac{1}{3}$ et elle est donc respectée. Si $m \leq -3$, l'inégalité ne possède pas de solution.

Finalement, en prenant aussi en compte la troisième condition, on trouve :

$$x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \frac{m+6}{9}\right] \text{ si } \frac{m+6}{9} > \frac{1}{2} \text{ c.à.d. si } m > \frac{-3}{2}$$
$$x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{m+6}{9}\right] \text{ si } \frac{m+6}{9} < \frac{1}{2} \text{ c.à.d. si } m < \frac{-3}{2}$$
$$x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[\text{ si } \frac{m+6}{9} = \frac{1}{2} \text{ c.à.d. si } m > \frac{-3}{2}$$

En conclusion :

Si $m \leq -3$, il n'y a pas de solution.
Si $m > -\frac{3}{2}$:

$$x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \frac{m+6}{9}\right]$$

Si $-3 < m < -\frac{3}{2}$:

$$x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{m+6}{9}\right]$$

Si $m = -\frac{3}{2}$:

$$x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$$

Question 2 (ANA14-17)

On peut écrire $f'(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs, en sachant que l'imparité de f' implique que 0 soit racine, et qu'il y ait symétrie pour les autres racines $x = 2$ et $x = -2$:

$$f'(x) = a.x.(x-2).(x+2) = a.x.(x^2-4) = a.(x^3-4x)$$

où $a \in \mathbb{R}$. Et donc

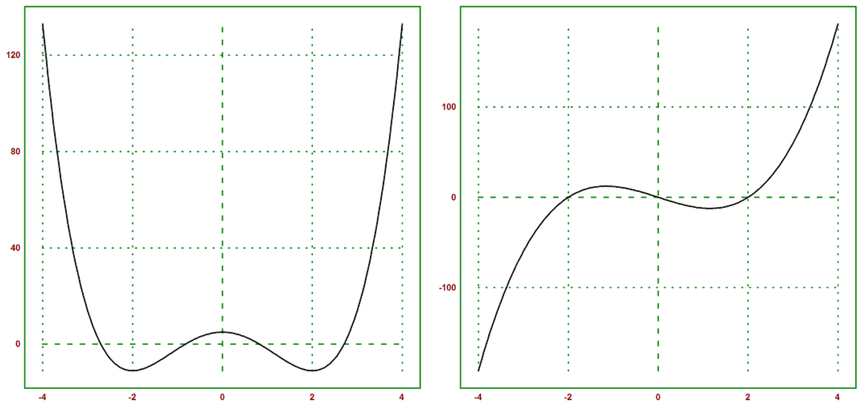
$$f(x) = a.\left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right) + c = \frac{a}{4}.x^4 - 2a.x^2 + c$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}) &= \frac{a}{4}.4 - 2a.2 + c && = c - 3a = -7 \\ f(4) &= \frac{a}{4}.256 - 2a.16 + c && = c + 32a = 133 \end{aligned}$$

On en déduit que $35a = 140$ et donc $a = 4$; et puis, $c = 5$.
Finalement,

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$$



Représentation de $f(x)$ et de sa dérivée première.