Soit le cercle $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$. Soit le point P de coordonnées (x,y)=(0,2). L'on considère toutes les droites passant par P et coupant C en deux points. Quel est le lieu du milieu de la corde délimitée par ces deux points ? Donnez-en l'équation cartésienne et déterminez-en les caractéristiques principales.

Soit $d_m \equiv y = mx + 2$ la famille de droites passant par P . On recherche le lieu des points M déterminés par l'intersection de d_m avec $\mathscr{C}$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = mx + 2 \end{cases}$$

On obtient une équation du second degré : $\left(1+m^2\right)x^2 + 4mx + 3 = 0$
Le réalisant est $\rho = 4m^2 - 12$ et il doit être positif ou nul pour obtenir deux points d'intersection.

$$m^2 - 3 \geq 0 \iff m \in \left]-\infty\,; -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}\,; +\infty\right[$$

L'abscisse et l'ordonnée du point milieu d'un segment sont obtenus (resp.) en divisant par deux la somme des abscisses et la somme des ordonnées des extrémités de celui-ci. Or, la somme des abscisses correspond précisément à la somme des racines d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$. Comme celle-ci vaut $-\frac{b}{2a}$, l'abscisse du point milieu vaut :

$$x_M = -\frac{4m/(1+m^2)}{2} = -\frac{2m}{1+m^2}$$

En outre, $y_M = m \cdot x_M + 2$, d'où

$$y_M = \frac{2}{1+m^2}$$

Le lieu recherché est :

$$\mathscr{L} \equiv \left\{ \left(-\frac{2m}{1+m^2}; \frac{2}{1+m^2}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, m \in \left]-\infty\,; -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}\,; +\infty\right[\right\}$$

Ce lieu est une portion de cercle de centre (0,1) et de rayon 1 ($\mathscr{C} \equiv x^2 + (y-1)^2 = 1$). En effet,

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{2m}{1+m^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+m^2} - 1\right)^2 = 1 \qquad (\forall m \in \mathbb{R}) \\ \iff &\frac{4m^2}{(1+m^2)^2} + \frac{\left(1-m^2\right)^2}{(1+m^2)^2} = 1 \\ \iff &\frac{4m^2 + \left(1-m^2\right)^2}{(1+m^2)^2} = 1 \\ \iff &\frac{m^4 + 2m^2 + 1}{(1+m^2)^2} = 1 \\ \iff &\frac{\left(m^2+1\right)^2}{(1+m^2)^2} = 1 \end{aligned}$$