PREMIÈRE PARTIE	Lundi **09/12** – Début : **08h30** – Fin : **11h30**

CONSIGNES

— Chaque feuille à en-tête doit comporter votre nom, prénom et numéro d'ordre.
— Numérotez vos feuilles à en-tête dans le coin supérieur droit.
— *Les feuilles de brouillon ne seront pas remises avec la copie.*
— Cette seconde partie comporte 10 questions.

Barème des compétences : **(C2)** = 20 Pts **(C3)** = 10 Pts Total = 30 Pts

C2 : Appliquer une procédure

1 Donnez la forme algébrique des nombres complexes suivants

(a) $\dfrac{(3+\mathbf{i})^2}{1-2\,\mathbf{i}}+\dfrac{3}{2+\mathbf{i}}$ …/1

Solution:

$$\begin{aligned}\frac{(3+\mathbf{i})^2}{1-2\,\mathbf{i}}+\frac{3}{2+\mathbf{i}} &= \frac{8+6\mathbf{i}}{1-2\,\mathbf{i}}+\frac{3}{2+\mathbf{i}}\\ &= \frac{(8+6\mathbf{i})\,(1+2\mathbf{i})}{5}+\frac{3\,(2-\mathbf{i})}{5}\\ &= \frac{-4+22\mathbf{i}}{5}+\frac{6-3\mathbf{i}}{5}\\ &= \frac{2}{5}+\frac{19}{5}\mathbf{i}\end{aligned}$$

(b) $\dfrac{(-1+\mathbf{i})^5\,.\left(\sqrt{3}+\mathbf{i}\right)^4}{(2-2\,\mathbf{i})^3}$ …/1

Solution:

$$\begin{aligned}\frac{(-1+\mathbf{i})^5\,.\left(\sqrt{3}+\mathbf{i}\right)^4}{(2-2\,\mathbf{i})^3} &= \frac{\left(\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)^5.\left(2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^4}{\left(2\sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^3}\\ &= \frac{4\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\frac{15\pi}{4}\right).16\,\text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{16\sqrt{2}\,\text{cis}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}\\ &= 4\,\text{cis}\left(\frac{15\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)\\ &= 4\,\text{cis}\left(\frac{31\pi}{6}\right)\\ &= 4\text{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

2 Recherche, sous forme algébrique, les solutions dans $\mathbb{C}$ de …/2

$$z^2+(1-7\,\mathbf{i})\;z-(22+14\,\mathbf{i})=0$$

Solution: $\rho=(1-7\,\mathbf{i})^2+4\,(22+14\,\mathbf{i})$ $\quad|\rho|=\sqrt{40^2+42^2}=\sqrt{1600+1764}=\sqrt{3364}=58$

$=-48-14\,\mathbf{i}+88+56\,\mathbf{i}$

$=40+42\,\mathbf{i}$

RCC $\rho=\pm\left(\sqrt{\frac{58+40}{2}}+\mathbf{i}\sqrt{\frac{58-40}{2}}\right)=\pm\,(7+3\,\mathbf{i})$

solution de l'équation : $z = \dfrac{-(1-7\,\mathbf{i}) \pm (7+3\,\mathbf{i})}{2} = \begin{cases} 3+5\,\mathbf{i} \\ -4+2\,\mathbf{i} \end{cases}$

$$S = \{3+5\,\mathbf{i}\,;\ -4+2\,\mathbf{i}\}$$

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ …/3

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan(x-1) = \arctan(2-x)$$

Solution: CE : $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \arctan\left(\tfrac{1}{x}\right) - \arctan(x-1) = \arctan(2-x) &\iff \arctan\left(\tfrac{1}{x}\right) = \arctan(x-1) + \arctan(2-x) \\ &\iff \tfrac{1}{x} = \tfrac{x-1+2-x}{1-(x-1)(2-x)} \\ &\iff x^2 - 4x + 3 = 0 \end{aligned}$$

Après vérification de la CE, l'ensemble des solutions est : S= $\{1,3\}$

4 Soit la fonction $f(x) = x \cdot \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Déterminez :

(a) son domaine de définition …/1

Solution: **dom** $f = \mathbb{R}_0$

(b) la présence de points creux et/ou d'asymptotes au graphe …/2

Solution:

- limite en zéro : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} x \cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$
  conclusion : le graphe de la fonction admet un point creux en $(0,0)$
- limite en l'infini : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x \cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = (\pm\infty) \cdot 0 \implies$ FI (forme indéterminée)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} x \cdot \arctan\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] \text{ FI} \\ &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1 \end{aligned}$$

conclusion : le graphe de la fonction admet une asymptote horizontale (à droite et à gauche) d'équation $y = 1$

5 Calculez les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(x)-2x}{\sin^3(x)}$ …/2

Solution: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(x)-2x}{\sin^3(x)} = \left[\dfrac{\arcsin(0)-0}{\sin^3(0)}\right] = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

$$\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-2}{3\sin^2(x)\cos(x)}$$

$$= \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{1-0}}-2}{3\sin^2(0)\cos(0)}\right] \qquad \cos(0)=1\ ;\ \sin^2 x \geq 0$$

$$= \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

(b) $\lim_{x\to+\infty} (2x+1)\left(\arctan(x)-\dfrac{\pi}{2}\right)$ …/2

Solution: $\lim_{x\to+\infty} (2x+1)\left(\arctan(x)-\frac{\pi}{2}\right) = [(+\infty)\,(0)]$ FI

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2x+1}} \overset{\text{FI}}{=} \left[\frac{0}{0}\right] \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-2}{(2x+1)^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x+1)^2}{-2\left(1+x^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{-2x^2} = -2$$

6 Dériver les fonctions suivantes. La réponse finale sera *simplifiée* au maximum et *factorisée* si possible.

(a) $f(x) = x\cdot\arcsin x$ …/2

Solution: $(x\cdot\arcsin x)' = \arcsin(x) + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(b) $f(x) = 3\arctan\left(\sqrt{x}\right)$ …/2

Solution: $\left(3\arctan\left(\sqrt{x}\right)\right)' = \dfrac{3}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'$

$$= \frac{3}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3}{2(1+x)\sqrt{x}}$$

7 On considère la fonction : .../2

$$g(x) = 3 \cdot \arccos^2(x) - \pi \cdot \arccos(x) + \pi^2, \quad x \in [-1, 1].$$

Étudiez les variations de la fonction $g(x)$, déterminez la coordonnée du ou des points où elle atteint un extremum, et précisez s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

Solution: $g'(x) = \left(3 \cdot \arccos^2(x) - \pi \cdot \arccos(x) + \pi^2\right)' = \dfrac{\pi - 6\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

x	-1		$\sqrt{3}/2$		1
$\pi - 6\arccos(x)$	-5π	$-$	0	$+$	π
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
$g(x)$	$3\pi^2$	$\searrow$	$\frac{11\pi^2}{12}$	$\nearrow$	π^2

Il s'agit d'un point minimum de coordonnée $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{11\pi^2}{12}\right)$

C3 : Résoudre un problème

8 M. et Mme Chombier ont du mal à trouver le sommeil, car leurs voisins du dessus donnent une petite fête. Tout à coup, un bouchon saute, et les joyeux fêtards trinquent tous ensemble. M. Chombier dénombre 28 tintements de verres. Combien y a-t-il de convives ? .../4

Solution: Il y a 8 convives.

En effet, il suffit de résoudre l'équation $\mathbf{C}_n^2 = 28$ où n est le nombre de convives, un tintement correspondant à entrechoquer deux verres choisis parmi n.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_n^2 = 28 &\iff \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = 28 \\ &\iff n(n-1) = 56 \\ &\iff n^2 - n - 56 = 0 \\ &\iff n = -7 \text{ ou } n = 8 \end{aligned}$$

On sélectionne forcément la solution positive.

9 Soit n un nombre entier et $z = \left(\dfrac{2\,\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}\right)^n$ un nombre complexe. .../2

Pour quelle(s) valeur(s) de n, le nombre complexe z est-il un nombre réel négatif ?

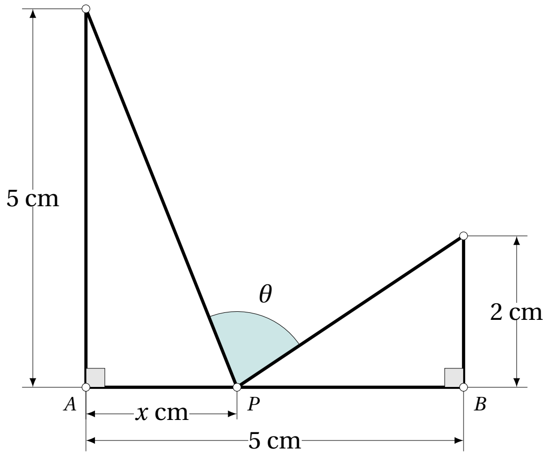
Solution: $z = \left(\dfrac{2\,\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{4}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}\,\text{cis}\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

le nombre complexe z est un nombre réel négatif si et seulement si son argument vaut $\pi + 2k\pi$ quelque soit l'entier k.

$$\frac{n\pi}{4} = \pi + 2k\pi \iff n\pi = 4\pi + 8k\pi \iff n = 4 + 8k$$

conclusion : z est un nombre réel négatif si et seulement si $n = 4 + 8k \ (\forall k \in \mathbb{Z})$

10 Dans la figure ci-dessous, les points A, P et B sont alignés. Trouvez la valeur de x (au millième près) qui maximise l'angle θ. …/4



Solution: $\theta(x) = \pi - \overbrace{\arctan\left(\frac{5}{x}\right)}^{\widehat{APA'}} - \overbrace{\arctan\left(\frac{2}{5-x}\right)}^{\widehat{BPB'}}$

on étudie les variations de la fonction θ :

$$\theta'(x) = \frac{3x^2 - 50x + 95}{\left(x^2+25\right)\left((5-x)^2+4\right)}$$

il faut encore établir le TV de la fonction θ pour pouvoir déterminer la valeur de x (au millième près) qui maximise l'angle … on trouve $x \approx 2,187$