DEUXIÈME PARTIE	Lundi **09/12** – Début : **12h00** – Fin : **13h00**

CONSIGNES
- Chaque feuille à en-tête doit comporter votre nom, prénom et numéro d'ordre.
- Numérotez vos feuilles à en-tête dans le coin supérieur droit.
- *Les feuilles de brouillon ne seront pas remises avec la copie.*
- Cette seconde partie comporte 4 questions.

Barème des compétences : **(C1)** = 12 Pts Total = 12 Pts

C1 : Expliciter les savoirs et les procédures

1 Soit la fonction $f(x) = 2 - \sqrt{x+3}$. .../3

Déterminez l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée et l'expression analytique de la fonction réciproque f^{-1}.

Solution: $\mathbf{dom}\, f^{-1} =]-\infty;2]$ $\quad$ $\mathbf{im}\, f^{-1} = [-3;+\infty[$ $\quad$ $f^{-1}(x) = (2-x)^2 - 3$

2 Indiquez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Dans le premier cas, aucune démonstration n'est demandée. Dans le second cas, proposez une correction.

(a) La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel. .../1

Solution: VRAI

(b) Un nombre complexe est réel si et seulement si son argument est égal à zéro. .../1

Solution: FAUX
Un nombre complexe est réel si et seulement si son argument est égal à $k\pi$ pour tout entier k.

(c) La fonction $f : x \mapsto 1 - \arccos(x)$ est strictement décroissante $\forall x \in [-1;1]$ .../1

Solution: FAUX
La fonction $f : x \mapsto 1 - \arccos(x)$ est strictement **croissante** $\forall x \in [-1;1]$

(d) $\forall x \in [-1;1]\ :\ \cos^2(\arcsin x) = 1 + x^2$ .../1

Solution: FAUX car $\cos^2(\arcsin x) = 1 - x^2$

3 (a) Citez la formule de De Moivre (on ne demande pas de la démontrer). .../2

(b) Appliquez-la pour calculer la forme algébrique de $\left(-1 + \mathbf{i}\sqrt{3}\right)^{343}$. .../1

Solution: Formule de de Moivre :

$$(r\ \mathbf{cis}\ \theta)^n = r^n\ \mathbf{cis}\,(n \cdot \theta)$$

La forme trigonométrique de $-1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$ est $2\ \mathbf{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et la formule de de Moivre s'applique :

$$(-1 + \mathbf{i}\sqrt{3})^{343} = 2^{343}\ \mathbf{cis}\left(343 \times \frac{2\pi}{3}\right)$$

et on obtient la forme algébrique :

$$
\begin{aligned}
&= 2^{343}\,\mathbf{cis}\,(228\pi + 2\pi/3)\\
&= 2^{343}\,\mathbf{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\
&= 2^{342}(-1+\mathbf{i}\sqrt{3})
\end{aligned}
$$

4 Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Prouvez que $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$. .../2

Solution: Soient $z_1 = r_1 \cdot \text{cis}\,\theta_1$ et $z_2 = r_2 \cdot \text{cis}\,\theta_2$

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (r_1 \cdot \text{cis}\,\theta_1) \cdot (r_2 \cdot \text{cis}\,\theta_2)\\
&= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos\theta_1 + \mathbf{i}\ \sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + \mathbf{i}\ \sin\theta_2)\\
&= |z_1| \cdot |z_2| \cdot [(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2) + \mathbf{i} \cdot (\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \sin\theta_2 \cdot \cos\theta_1)]\\
&= |z_1| \cdot |z_2| \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathbf{i} \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)]\\
&= |z_1| \cdot |z_2| \cdot \text{cis}\,(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}
$$

dès lors, $\arg(z_1 \cdot z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2)$