

Les vecteurs dans le plan

Définition

Soit A et B deux points distincts. Le *vecteur* \overrightarrow{AB} est caractérisé par :

- ▶ sa direction, celle de la droite (AB) ;
- ▶ par sa longueur AB , notée $\|\overrightarrow{AB}\|$ (la norme du vecteur \overrightarrow{AB});
- ▶ et par son sens, de A vers B .

Si A et B sont confondus, le vecteur \overrightarrow{AA} est le *vecteur nul*, aussi noté $\vec{0}$.



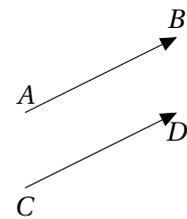
Égalité vectorielle

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont

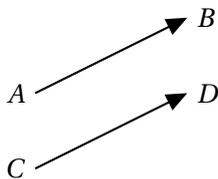
- ▶ même direction,
- ▶ même norme,
- ▶ même sens.

On note souvent un vecteur par une seule lettre

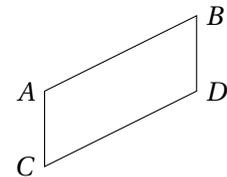
$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$



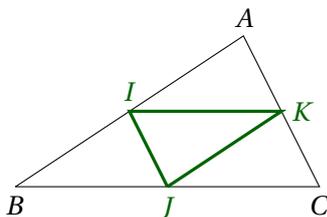
Le théorème fondamental



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC \text{ est un parallélogramme}$$



Exemple : Soit ABC un triangle quelconque. Les points I , J et K sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. En utilisant les points de la figure, donner deux vecteurs égaux à \overrightarrow{IK} .

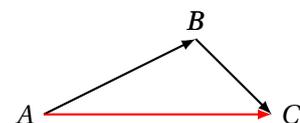


Réponse : $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{JC}$

Somme vectorielle

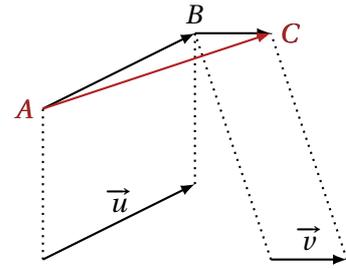
Théorème 1 (La relation de Chasles) Étant donnés trois points quelconques du plan A , B et C , on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



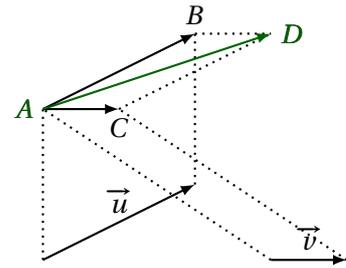
1^{ère} méthode Pour représenter la somme $\vec{u} + \vec{v}$,

- ▶ on prend un point quelconque A ;
- ▶ on représente \vec{AB} , un représentant de \vec{u} ;
- ▶ on représente \vec{BC} , un représentant de \vec{v} ;
- ▶ on a donc $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ d'après la relation de Chasles.



2^e méthode Pour représenter la somme $\vec{u} + \vec{v}$,

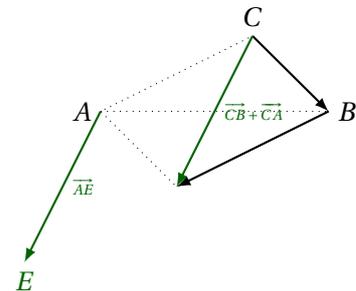
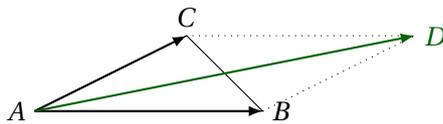
- ▶ on prend un point quelconque A ;
- ▶ on représente \vec{AB} , un représentant de \vec{u} ;
- ▶ on représente \vec{AC} , un représentant de \vec{v} ;
- ▶ on a donc $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AB} + \vec{AC}$;
- ▶ on place D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme;
- ▶ et alors $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AD}$.



Exercice n° 1

Soit ABC un triangle quelconque.

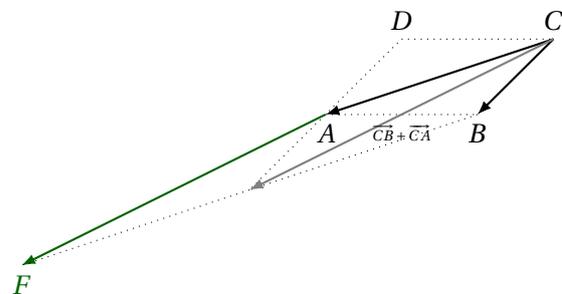
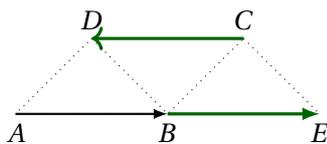
- 1° Placer le point D vérifiant $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$.
- 2° Placer le point E vérifiant $\vec{AE} = \vec{CB} + \vec{CA}$.



Exercice n° 2

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

- 1° Placer le point E vérifiant $\vec{AE} = \vec{AB} - \vec{CD}$.
- 2° Placer le point F vérifiant $\vec{AF} = \vec{CB} - \vec{AC}$.



Exercice n° 3

Dessiner un représentant des vecteurs suivants :

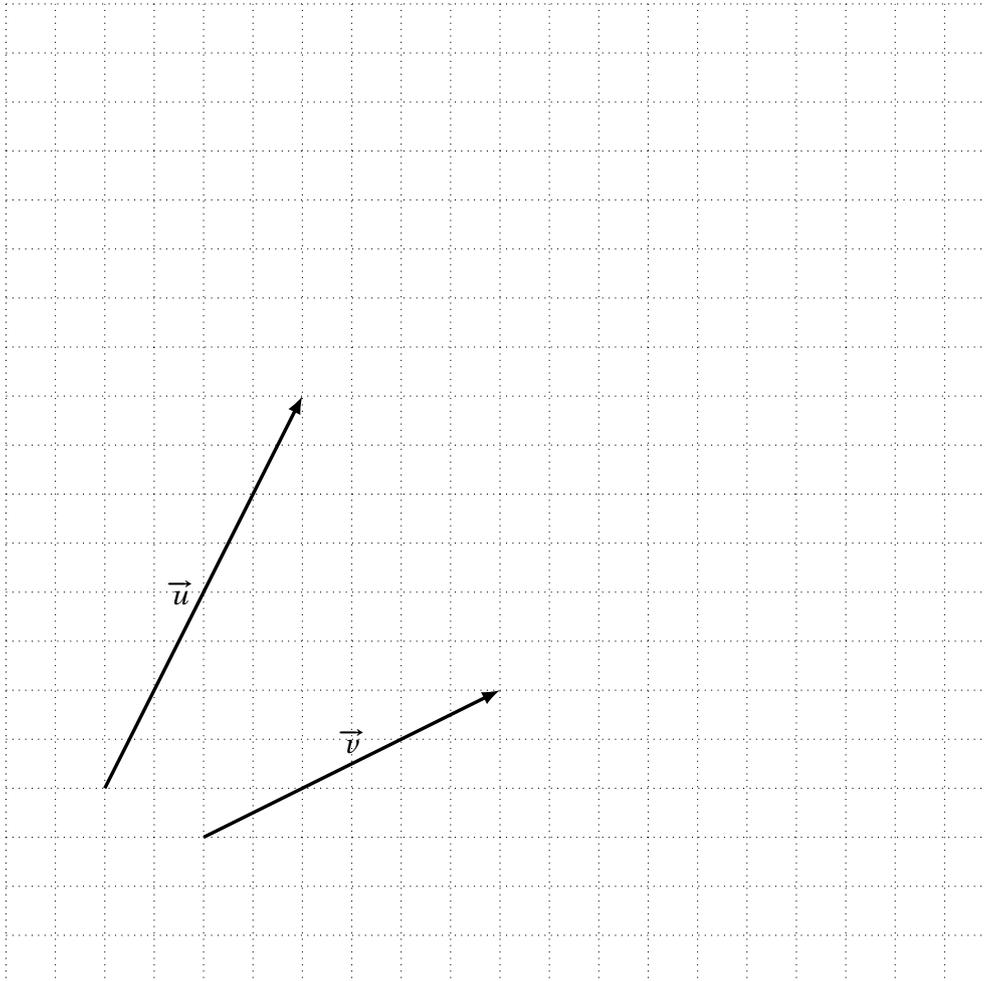
1° $2\vec{u}$

2° $\frac{1}{2}\vec{u}$

3° $-\frac{1}{3}\vec{v}$

4° $\vec{u} + \vec{v}$

5° $\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$

**Exercice n° 4**

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1° Placer le point E vérifiant $\vec{AE} = \vec{AB} - \vec{CD}$.

2° Placer le point F vérifiant $\vec{AF} = \vec{CB} - \vec{AC}$.

Exercice n° 5

À l'aide de la relation de Chasles, retrouvez les couples de vecteurs égaux :

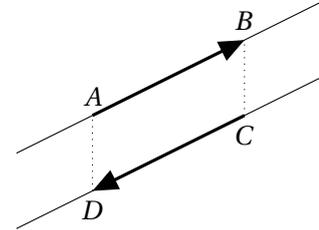
$$\vec{u}_1 = \vec{AM} + \vec{KA} + \vec{MR}; \quad \vec{u}_2 = \vec{AB} + \vec{RK} + \vec{BR} + \vec{KA}; \quad \vec{u}_3 = \vec{BR} - \vec{BA} - \vec{KR} + \vec{KA}; \quad \vec{u}_4 = \vec{KM} - \vec{BM} - \vec{RB}$$

Vecteur opposé

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont **opposés** si, et seulement si $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$
 Les vecteurs \vec{AB} et \vec{BA} sont opposés.

Propriété 2 Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont opposés si, et seulement si ils ont

- ▶ même direction,
- ▶ même norme,
- ▶ des sens opposés.



On note alors $\vec{u} = -\vec{v}$. On a également : $\vec{AB} = -\vec{BA}$.

Exercice n° 6

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

- 1° Placer le point E vérifiant $\vec{AE} = \vec{AB} - \vec{CD}$.
- 2° Placer le point F vérifiant $\vec{AF} = \vec{CB} - \vec{AC}$.

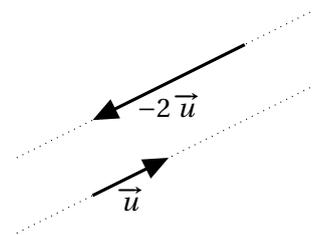
Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Soit λ un réel non nul et \vec{u} un vecteur. Le vecteur

$$\lambda \cdot \vec{u}$$

possède :

- ▶ même direction que \vec{u} ;
- ▶ même longueur que $|\lambda| \|\vec{u}\|$;
 - ▷ si $\lambda > 0$, même sens que \vec{u}
 - ▷ si $\lambda < 0$, un sens opposé à \vec{u}

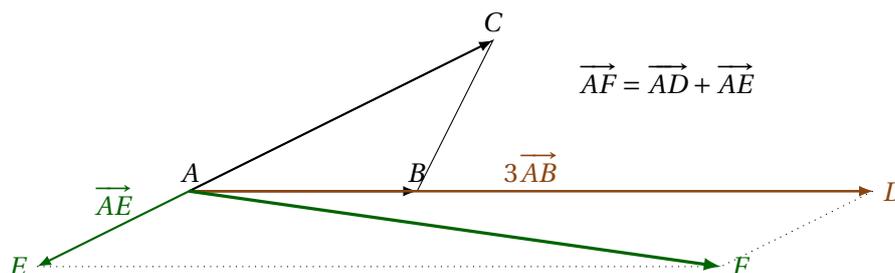


Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs opposés. On a alors $\vec{v} = -1 \cdot \vec{u}$ (ici, $\lambda = -1$)

Exercice n° 7

Soit ABC un triangle.

- 1° Placer le point D vérifiant $\vec{AD} = 3\vec{AB}$.
- 2° Placer le point E vérifiant $\vec{AE} = -0,5\vec{AC}$.
- 3° Placer le point F vérifiant $\vec{AF} = 3\vec{AB} - 0,5\vec{AC}$.



Exercice n° 8

Soit ABC un triangle.

- 1° Placer le point D vérifiant $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$.
- 2° Placer le point E vérifiant $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{CA}$.
- 3° Placer le point F vérifiant $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$.

Colinéarité

On dit que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** s'ils ont la même direction.

Par convention : Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

Théorème 3 Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel λ tel que

$$\vec{u} = \lambda \vec{v}$$

Exercice n° 9 : Montrer que deux droites sont parallèles

Soit ABC un triangle. Les points I et J sont définis par

- ▶ $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB}$
- ▶ $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$.

- 1° Justifier le fait que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}$.
- 2° En déduire que \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{BC} sont colinéaires.
- 3° Que peut-on conclure pour les droites (IJ) et (BC) ?

Solution :

- 1° Il suffit d'utiliser la relation de Chasles.
- 2° En déduire que \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{BC} sont colinéaires.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} \\ &= -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} && \text{car } \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AI} \\ &= -3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} && \text{car } \overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC} \\ &= 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC} && \text{car } \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \\ &= 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= 3\overrightarrow{BC} && \text{d'après la relation de Chasles.} \end{aligned}$$

On a

$$\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{BC}$$

Les vecteurs \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{BC} sont donc colinéaires.

- 3° Les droites (IJ) et (BC) sont alors parallèles car \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{BC} sont colinéaires.

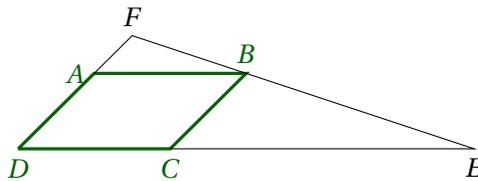
Exercice n° 10 : Montrer que trois points sont alignés

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Les points E et F sont définis par

- ▶ $\vec{DE} = 3\vec{DC}$
- ▶ $\vec{AF} = -0,5\vec{AD}$.

- 1° Exprimer \vec{FD} en fonction de \vec{AD} puis \vec{FE} en fonction de \vec{AD} et \vec{DC} .
- 2° Exprimer \vec{FB} en fonction de \vec{AD} et \vec{DC} .
- 3° En déduire que \vec{FB} et \vec{FE} sont colinéaires.
- 4° Que peut-on conclure pour les points B , F et E ?

Solution :



$$\vec{FD} = 1,5\vec{AD}$$

$$\vec{FE} = 1,5\vec{AD} + 3\vec{DC}$$

$$\vec{FB} = 0,5\vec{AD} + \vec{DC}$$

1°

$$\begin{aligned}\vec{FD} &= \vec{FA} + \vec{AD} \\ &= 0,5\vec{AD} + \vec{AD} \\ &= 1,5\vec{AD}\end{aligned}$$

d'après la relation de Chasles

$$\text{car } \vec{AF} = -0,5\vec{AD}$$

$$\begin{aligned}\vec{FE} &= \vec{FD} + \vec{DE} \\ &= 1,5\vec{AD} + \vec{DE} \\ &= 1,5\vec{AD} + 3\vec{DC}\end{aligned}$$

d'après la relation de Chasles

$$\text{car } \vec{FD} = 1,5\vec{AD}$$

$$\text{car } \vec{DE} = 3\vec{DC}$$

2°

$$\begin{aligned}\vec{FB} &= \vec{FA} + \vec{AB} \\ &= 0,5\vec{AD} + \vec{AB} \\ &= 0,5\vec{AD} + \vec{DC}\end{aligned}$$

d'après la relation de Chasles

$$\text{car } \vec{AF} = -0,5\vec{AD}$$

$$\text{car } \vec{AB} = \vec{DC}$$

3° On a $\vec{FE} = 3 \cdot \vec{FB}$ donc les deux vecteurs sont colinéaires.

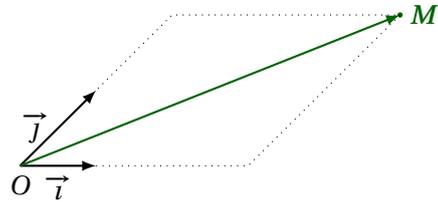
4° Les droites (FE) et (FB) sont parallèles et ont un point commun, le point F . Elles sont donc confondues.

Les points B , F et E sont donc alignés.

Repérage et coordonnées

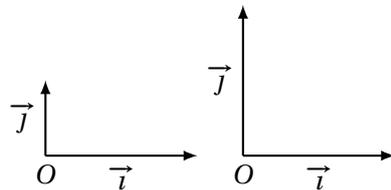
Repère du plan

Soit O un point du plan, \vec{i} et \vec{j} deux vecteurs non colinéaires.



Pour tout point M , le vecteur \overrightarrow{OM} s'exprime en fonction de \vec{i} et \vec{j} .

$$\overrightarrow{OM} = 3 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j}$$



On dit alors que $(O; \vec{i}, \vec{j})$ forme un repère du plan. Un repère du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est dit

- ▶ **orthogonal** si les vecteurs \vec{i} et \vec{j} ont des directions perpendiculaires (on dit alors que ces vecteurs sont orthogonaux).
- ▶ **orthonormal** si les vecteurs \vec{i} et \vec{j} sont orthogonaux et de même norme.

Coordonnées

Coordonnées de M et de \overrightarrow{OM}

Soit \mathcal{P} le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout point M du plan, il existe un unique couple de réels $(x; y)$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$

On dit alors que

- ▶ le vecteur \overrightarrow{OM} a pour coordonnées $(x; y)$,
- ▶ le point M a pour coordonnées $(x; y)$.

Coordonnées d'un vecteur \vec{v}

Soit \mathcal{P} le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit \vec{u} un vecteur et M le point tel que

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM}$$

Alors les coordonnées du vecteur \vec{u} sont celles de \overrightarrow{OM} .

Règles de calculs

Propriété 4 Soit \mathcal{P} le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs et k un réel.

- ▶ $\vec{u} = \vec{v} \iff x = x' \text{ et } y = y'$;
- ▶ le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$;
- ▶ le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx; ky)$.

Théorème 5 (Coordonnées de \vec{AB}) Soit \mathcal{P} le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. Les coordonnées du vecteur \vec{AB} sont

$$(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Théorème 6 (Milieu d'un segment $[AB]$) Soit \mathcal{P} le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. Les coordonnées du point milieu M du segment $[AB]$ sont

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Théorème 7 (Norme d'un vecteur) Soit \mathcal{P} le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ **orthonormé**.

Soit un vecteur quelconque $\vec{u}(x; y)$, alors sa **norme** est le nombre $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Soient deux points quelconques $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors la longueur du segment $[AB]$ est donnée par

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exercice n° 11

Sur la figure ci-dessous, déterminer les coordonnées des vecteurs dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

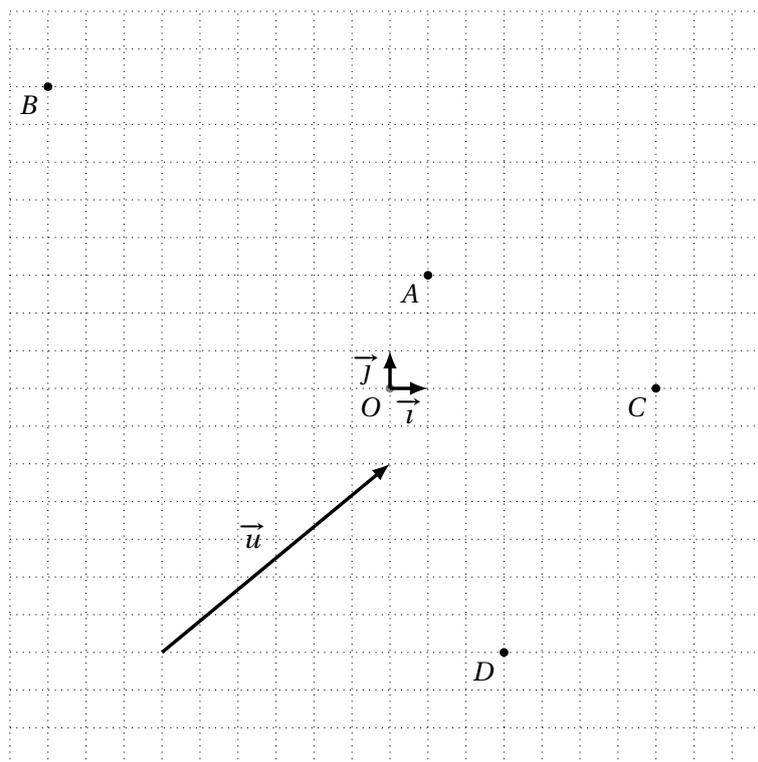
1° \vec{OA}

2° \vec{AB}

3° \vec{CD}

4° \vec{u}

5° $\vec{u} + \vec{AB}$



Exercice n° 12

Soit les points $A(1; 3)$, $B(3; 5)$ et $C(-1; 1)$ dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1° Déterminer les coordonnées du vecteur \vec{AB} et \vec{BC} .

2° Quelle est la coordonnée de M , milieu du segment $[A; B]$, de M' , milieu de $[A; C]$?

3° Quelle est la coordonnée du point D sachant que $\vec{CD} = \vec{AB}$

Exercice n° 13

Soit \mathcal{P} le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(2;3)$, $B(4;5)$, C et D tels que $ABCD$ soit un parallélogramme.

- 1° Déterminer les coordonnées du vecteur \vec{AB} .
- 2° En déduire celles du vecteur \vec{DC} .

Exercice n° 14

Soit \mathcal{P} le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(2;4)$, $B(-2;2)$ et $C(4;-2)$.

- 1° Déterminer les coordonnées du vecteur \vec{BC} .
- 2° En déduire les coordonnées du point M vérifiant $\vec{AM} = \vec{BC}$.

Exercice n° 15

Déterminer la norme du vecteur :

- 1° d'origine $A=(-1;5)$ et d'extrémité $B=(3;-2)$
- 2° $\vec{CD} = (3;2)$
- 3° $\vec{u} = (5;-3)$

Colinéarité

Théorème 8 Soit \mathcal{P} le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Les vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont **colinéaires** si, et seulement si

$$x'y - xy' = 0$$

Exercice n° 16 : Montrer que trois points sont alignés

On considère les points $A(-2;-1)$, $B(2;1)$ et $C(4;2)$.

- 1° Montrer que \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires.
- 2° En déduire que les points A , B et C sont alignés.

Solution :

Déterminons les coordonnées de \vec{AB} :

$$\begin{cases} x_B - x_A = 2 - (-2) = 4 \\ y_B - y_A = 1 - (-1) = 2 \end{cases}$$

Donc $\vec{AB}(4;2)$

Déterminons les coordonnées de \vec{AC} :

$$\begin{cases} x_C - x_A = 4 - (-2) = 6 \\ y_C - y_A = 2 - (-1) = 3 \end{cases}$$

Donc $\vec{AC}(6;3)$.

On a $\vec{AB}(4;2)$ et $\vec{AC}(6;3)$.

$$\frac{y_{\vec{AC}}}{y_{\vec{AB}}} = \frac{3}{2} \text{ et } \frac{x_{\vec{AC}}}{x_{\vec{AB}}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

On a

$$\vec{AC} = \frac{3}{2} \vec{AB}$$

$$\vec{AC} = \frac{3}{2} \vec{AB}$$

Les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires.
donc les droites (AB) et (AC) sont parallèles
donc les points A , B et C sont alignés.

Vrai-Faux

Exercice n° 17

- 1° Si ABC est un triangle isocèle alors $\vec{AB} = \vec{AC}$ Vrai Faux
- 2° Si ABCD est un parallélogramme, alors $\vec{BA} + \vec{BC} = \vec{BD}$ Vrai Faux
- 3° Si ABC est un triangle de médiane [AI], alors $\vec{AI} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$ Vrai Faux
- 4° Si $\vec{AC} = 3\vec{AB}$, alors $\vec{BC} = 2\vec{BA}$ Vrai Faux
- 5° Si C est un point de la droite (AB) et que $\vec{CD} = 2013\vec{AB}$, alors A, B, C et D sont alignés Vrai Faux
- 6° Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, si $\vec{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{ON} = -\vec{i} + 2\vec{j}$, alors \vec{MN} a pour coordonnées (1;3) Vrai Faux

QCM

Exercice n° 18

- 1° D est l'image de E par la translation de vecteur \vec{AB} donc :
- les vecteurs \vec{AB} et \vec{ED} sont égaux
 - les vecteurs \vec{AB} et \vec{DE} sont égaux
 - les vecteurs \vec{BE} et \vec{DA} sont égaux
- 2° EXOS est un parallélogramme; quelles sont les vecteurs égaux?
- \vec{EX} et \vec{OS}
 - \vec{XO} et \vec{ES}
 - \vec{OE} et \vec{SX}
- 3° M est l'image de L par la translation de vecteur \vec{EI} ; quels quadrilatères cités sont des parallélogrammes :
- LIME
 - MILE
 - MIEL
- 4° Quelles sont les coordonnées du vecteur \vec{AB} connaissant les points A (3; -2) et B (-1; 5)?
- (2; 3)
 - (-4; 7)
 - (4; -7)
- 5° On connaît les points : E (2; -1), F (0; 3), G (1; -4), H (-1; 0); que peut-on dire des vecteurs \vec{EG} et \vec{FH} ?
- ils sont opposés
 - ils sont égaux
 - il n'y a rien à dire
- 6° Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les points M et N vérifient : $\vec{OM} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{ON} = \vec{i} - 1,5\vec{j}$. Les coordonnées du milieu du segment [MN] sont :
- $(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4})$
 - $(\frac{3}{2}; -\frac{9}{4})$
 - $(-\frac{3}{2}; \frac{9}{4})$
- 7° Si I est le milieu de [AB], alors pour tout point M du plan, on a :
- $2\vec{MI} = \vec{MB} + \vec{MA}$
 - $\vec{MI} = \vec{AI} + \vec{AM}$
 - $\vec{MI} = \vec{MA} + \vec{MB}$
- 8° Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on a : $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} + 9\vec{j}$. On pose $\vec{w} = 4\vec{u} - \vec{v}$. Les coordonnées de \vec{w} sont :
- (10; 25)
 - (5; -17)
 - (10; -7)