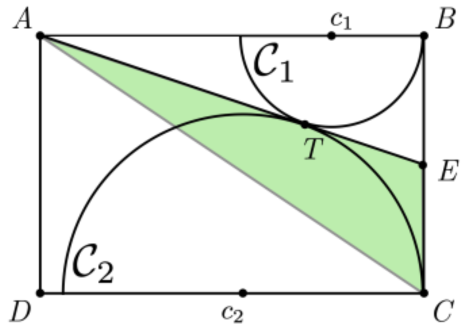
1 Soit un triangle rectangle ABC (avec $\widehat{ABC} = 90°$ et $\overline{BC} = 2\overline{AB}$) et un point D quelconque sur le segment BC. On trace un cercle $\mathscr{C}$ passant par A, B et D, et on nomme E l'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'hypoténuse AC.

(a) Illustrez l'énoncé par un dessin.

(b) Que vaut l'angle $\widehat{AED}$? **Justifiez** géométriquement votre raisonnement.

(c) On définit maintenant le rapport $\lambda = S'/S$ de la surface S' du quadrilatère $ABDE$ et de la surface S du triangle $\triangle DEC$. On dénote également par h la longueur $\overline{DE}$. Que vaut $\overline{AB}$ en fonction de h et λ ?

2 On considère le dessin suivant :



Les formes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont des demi-cercles (de centres c_1 et c_2) et dont les diamètres sont respectivement superposés aux côtés AB et DC du rectangle $ABCD$. Par ailleurs : ces deux demi-cercles sont tangents entre eux au point T ; $\mathscr{C}_1$ est tangent à BC en B ; et $\mathscr{C}_2$ est tangent à BC en C. La droite passant par A et T est tangente aux deux demi-cercles et intersecte BC en E.

Que vaut le rapport de longueur $\frac{\overline{TE}}{\overline{BE}}$? En outre, si la surface du rectangle $ABCD$ vaut 1, que vaut l'aire du triangle $\triangle AEC$ (en vert) ?

(indice : pensez à exploiter les tangences)

3 Un problème géométrique de Fermat

(a) On demande de représenter un rectangle $ABCD$ de largeur $L = AB$ et de longueur $l = BC$ tel que $L^2 = 2l^2$.

Représentez aussi, à l'extérieur de $ABCD$, un demi-cercle ayant pour diamètre le côté AB du rectangle. Sur ce demi-cercle, choisissez un point P quelconque et tracez ensuite les segments de droite PC et PD qui intersectent le segment AB respectivement en X et Y. Indiquez ces points sur le dessin.

Enfin, à partir du point P, tracez une droite perpendiculaire à DC qui rencontre le côté AB en Q et le côté DC en R. On pose $h = \overline{PQ}$, la longueur du segment PQ.

(b) Exprimez le carré de la longueur du segment XY en fonction de l et h. (Aidez-vous d'abord, éventuellement, aussi de L.)

(c) Exprimez le produit des longueurs des segments DR et RC en fonction de h. (Vous n'avez pas besoin de la réponse à la sous-question précédente pour répondre à cette sous-question-ci.)

(d) Montrer que

$$\overline{XY}^2 = 2 \cdot \overline{AY} \cdot \overline{BX}. \quad (1)$$

Justifiez en énonçant des propriétés connues si nécessaire.