Compétences : Calculer (déterminer, estimer, approximer)

— un angle par une méthode routinière;
— l'ensemble des solutions d'une équation, d'une inéquation trigonométrique, comportant au plus un seul paramètre, avec extension à d'autres équations par itérations.

Comment résoudre une équation trigonométrique?

1$^{\text{er}}$ cas : l'équation est élémentaire : Si $-1 \leq a \leq 1$ et $-1 \leq b \leq 1$, on a

1. $\sin x = a$ ou $\sin x = \sin \alpha$ (angles supplémentaires)
2. $\cos x = b$ ou $\cos x = \cos \beta$ (angles opposés)
3. $\tan x = c$ ou $\tan x = \tan \gamma$ (angles antisupplémentaires)

Exemple : résoudre $2\cos(2x) + 1 = 0$

$$\begin{aligned} 2\cos(2x)+1=0 &\iff \cos(2x) = -\tfrac{1}{2} \quad \text{(équation élémentaire)} \\ &\iff \cos(2x) = \cos\tfrac{2\pi}{3} \quad \text{(angles opposés)} \\ &\iff 2x = \tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = -\tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned}$$

Ensemble des solutions : $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

2$^{\text{ème}}$ cas : L'équation se ramène à une équation élémentaire grâce aux propriétés des angles associés.

Exemple : résoudre $\tan 2x = \cot x$

$$\text{CE}: \quad 2x \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi \iff x \neq \tfrac{\pi}{4} + k\tfrac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad x \neq k\pi.$$

$$\cot x = \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{car } x \text{ et } \tfrac{\pi}{2} - x \text{ sont deux angles complémentaires}$$

$$\tan 2x = \cot x \iff \tan 2x = \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) \iff 2x = \tfrac{\pi}{2} - x + k\pi \iff 3x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \iff x = \tfrac{\pi}{6} + k\tfrac{\pi}{3}$$

Ensemble des solutions : $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3$^{\text{ème}}$ cas : Équations produits $u(x) \cdot v(x) = 0 \iff u(x) = 0$ ou $v(x) = 0$ (règle du produit nul)

Exemple : résoudre $(1 - 2\sin x)(\tan(3x) + 1) = 0$

$$\text{CE} : 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \iff x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} 1 - 2\sin x = 0 \\ \tan(3x) + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \tan 3x = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi & \text{(à écarter)} \\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi & \text{(à écarter)} \end{cases} \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$S = \left\{-\tfrac{\pi}{12} + k\tfrac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

4$^{\text{ème}}$ cas : Si l'équation est du deuxième degré en $\sin x$, $\cos x$ ou $\tan x$, on pose $\sin x = y$, $\cos x = y$ ou $\tan x = y$. On résout ensuite l'équation du deuxième degré en y et on est ainsi ramené à des équations élémentaires.

Exemple : résoudre $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$

On pose $y = \cos x$:

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0 &\iff 2y^2 + 5y + 2 = 0 \\ &\iff 2(y+2)\left(y + \tfrac{1}{2}\right) = 0 \\ &\iff y = -2 \quad \text{ou} \quad y = -\tfrac{1}{2} \\ &\iff \cos x = -2 \ \text{(à écarter)} \quad \text{ou} \quad \cos x = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Finalement, $S = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercices

1 Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en degrés.

(a) $\cos(t) = -\frac{1}{2}$

(b) $\sin(t) = 0{,}829$

(c) $\tan(t) = -0{,}754$

(d) $\cos(t) = -1{,}43$

(e) $\tan(t) = 5{,}33$

(f) $\sin(3t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(g) $\tan(5t) = 3{,}273$

(h) $\cos\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

2 Résoudre les équations suivantes en donnant les solutions en radians.

(a) $\sin\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(b) $\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

(c) $\sin(3t) = \sin(2t)$

(d) $\cos(2t) = \cos(4t)$

(e) $\sin(2t) = \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$

(f) $\sin\left(\frac{4t}{3}\right) + \cos\left(\frac{t}{2}\right) = 0$

(g) $\tan(3t) = \cot(t)$

(h) $\cos(2t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4t\right)$

(i) $\cos(3x) = \frac{1}{2}$

(j) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(k) $\cos(3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(l) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

(m) $\cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(n) $\sin(2x) = \frac{1}{2}$

(o) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(p) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

(q) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

(r) $\tan(4x) = -1$

(s) $\cot x = -\sqrt{3}$

(t) $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

3 Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

(a) $\sin(3x) = \sin(2x)$

(b) $\cos(3x) = \cos(2x)$

(c) $\tan(3x) = \tan x$

(d) $\cos(3x) = \sin(2x)$

(e) $\sin(2x) = -\sin x$

(f) $\tan(2x) + \tan x = 0$

(g) $\cos(2x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right)$

(h) $\tan(2x) = \cot x$

4 **Équations Produits / du deuxième degré**

Résoudre les équations pour $x \in [0, 2\pi]$.

(a) $(1 - \cos x)(1 - \sin x) = 0$

(b) $\cos^2 x = \sin^2 x$

(c) $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$

5 **Équations Produits / du deuxième degré**

Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$

(a) $2\cos^2 x = 1$

(b) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

(c) $2\cos^2 x = \sin^2 x - \frac{1}{4}$

(d) $\tan^2 x + 4\tan x + 3 = 0$

(e) $4\sin 2x + 6\cos x = 0$

(f) $2\sin^2 x - \sin x \cos x = 0$

(g) $\tan x - \cot x = 1$